

1. Отыскание точек локального экстремума функции.

Достаточные условия экстремума.

1°. Чтобы диф-мая на (a, b) $f(x)$ не убывала (не возрастала) на (a, b) , **необходимо и достаточно**, чтобы $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) на (a, b) .

2°. Чтобы дифференцируемая $f(x)$ **возрастала** (убывала) на (a, b) , **достаточно**, чтобы $f'(x) > 0$ (< 0) всюду на (a, b) .

Пусть $f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки c . $f(x)$ имеет в точке c **локальный максимум (минимум)**, если $\exists$ такая окрестность точки c , в пределах которой $f(c)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех других значений функции.

Необходимое условие экстремума: если $f(x)$ дифференцируема в точке c и имеет в этой точке экстремум, то $f'(c) = 0$.

1-е ДУЭ. Т1. Пусть c – точка возможного экстремума $f(x)$, и пусть $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c .

Тогда, если в пределах этой окрестности $f'(x) > 0$ (< 0) слева от точки c и $f'(x) < 0$ (> 0) справа от c , то $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум). Если $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от c , то экстремума в точке c нет.

Док-во. 1) Пусть в пределах рассматриваемой окрестности $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) слева от c и $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) справа от c . Пусть x_0 – $\forall$ значение аргумента из этой окрестности: $x_0 \neq c$. $f(x)$ диф-ма ($\Rightarrow$ непрерывна) на $[c, x_0]$. Применяя к $f(x)$ по $[c, x_0]$ Т. Лагранжа:

$$f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0) \quad (1)$$

где $c < \xi < x_0$. Т.к. $f'(\xi) > 0$ (< 0) при $x_0 < c$ и $f'(\xi) < 0$ (> 0) при $x_0 > c$, правая часть (1) > 0 (< 0) $\Rightarrow$ левая тоже $\Rightarrow$ значение $f(c)$ – наибольшее (наименьшее) среди всех значений $f(x)$ в окрестности.

2) Если $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от c , то правая часть (1) имеет разные знаки при $x_0 < c$ и при $x_0 > c \Rightarrow$ отсутствие экстремума в точке c .

Т1.1. Пусть $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c , за исключением, быть может, самой точки c , и непрерывна в точке c . Тогда, если в пределах этой окрестности

$f'(x) > 0$ (< 0) слева от c и $f'(x) < 0$ (> 0) справа от c , то $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум). Если $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от c , то экстремума в точке c нет.

Док-во – аналогично, но применимость Т. Лагранжа устанавливается так: по условию функция диф-ма ($\Rightarrow$ непрерывна) всюду на (c, x_0) и непрерывна в точке $c \Rightarrow f(x)$ непрерывна всюду на $[c, x_0]$ и диф-ма во всех внутренних точках $[c, x_0]$.

2-е ДУЭ. Т2. Пусть $f(x)$ имеет в данной точке c возможного экстремума конечную 2-ую производную. Тогда $f(x)$ имеет в точке c максимум, если $f^{(2)}(c) < 0$, и минимум, если $f^{(2)}(c) > 0$.

Док-во. Из $f^{(2)}(c) < 0$ ($f^{(2)}(c) > 0$) и Т2° $\Rightarrow f'(x)$ убывает (возрастает) в точке c . По условию $f'(c) = 0 \Rightarrow \exists$ такая окрестность точки c , в пределах которой $f'(x) > 0$ (< 0) слева от c и $f'(x) < 0$ (> 0) справа от $c \Rightarrow$ по Т1 $f(x)$ имеет в точке c максимум (минимум).

3-е ДУЭ. Т3. Пусть $n \geq 1$ – целое число и пусть функция $y = f(x)$ имеет производную порядка n в некоторой окрестности точки c и производную порядка $n+1$ в самой точке c . Пусть справедливы: $f^{(1)}(c) = f^{(2)}(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$, $f^{(n+1)}(c) \neq 0$ (2)

Если n – **нечетное**, то $y = f(x)$ имеет локальный экстремум в точке c : локальный минимум при $f^{(n+1)}(c) > 0$ и локальный максимум при $f^{(n+1)}(c) < 0$.

Док-во. При $n = 1$ это Т2.

Пусть $n \geq 3$ и $f^{(n+1)}(c) > 0$ (для $f^{(n+1)}(c) < 0$ аналогично) $\Rightarrow$ по Т2, примененной к $f^{(n)}(x)$, функция $f^{(n)}(x)$ возрастает в точке c . Поскольку $f^{(n)}(c) = 0 \Rightarrow$ найдется достаточно малая окрестность точки c , в пределах которой $f^{(n)}(x) < 0$ слева от c и $f^{(n)}(x) > 0$ справа от c . Разложим $f'(x)$ в окрестности точки c по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $\Rightarrow$ для $\forall x$ из достаточно малой окрестности точки c между c и $x \exists \xi$:

$$f'(x) = f'(c) + \frac{f^{(2)}(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}$$

Из (2) и доп. условия $f'(c) = 0 \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} \quad (3)$$

ξ лежит между c и $x \Rightarrow$ для всех x из малой окрестности точки c : $f^{(n)}(c) < 0$ при $x < c$ и $f^{(n)}(c) > 0$ при $x > c$. При нечетном n число $n-1$ – четное $\Rightarrow$ вся правая (и левая) часть (3) для всех x из малой окрестности c отрицательна слева от c и положительна справа от c . По Т1 $f(x)$ имеет локальный минимум в точке c .

3. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования графика функции.

01. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена для сколь угодно больших значений аргумента, ради определенности **положительного** знака.

02. Прямая $Y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$.

Т1. Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \rightarrow +\infty$ наклонную асимптоту $Y = kx + b$ необходимо и достаточно, чтобы $\exists$ два предельных значения

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b \quad (1)$$

Док-во. 1) Необходимость. Пусть график функции

$y = f(x)$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ асимптоту $Y = kx + b$,

т. е. $f(x) = kx + b + \alpha(x) \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = k$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [b + \alpha(x)] = b$$

2) Достаточность. Пусть $\exists$ предельные значения (1). Из 2-го $\Rightarrow$ разность $f(x) - kx - b$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$.

Обозначив эту бесконечно малую $\alpha(x)$, получим для $f(x)$

представление $f(x) = kx + b + \alpha(x)$.

Замечание. Для $x \rightarrow -\infty$ все аналогично.

Схема исследования графика функции

1°. Уточнить область задания функции.

2°. Выяснить вопрос о существовании асимптот (вертикальных и наклонных).

3°. Найти области возрастания и убывания функции и точки экстремума.

4°. Найти области сохранения направления выпуклости и точки перегиба.

5°. Найти точки пересечения графика функции с осью Ox .

2. Направление выпуклости графика функции и точки перегиба. Достаточные условия перегиба.

$f(x)$ дифф-ма в $\forall$ точке $(a, b) \Rightarrow \exists$ касательная к графику $y = f(x)$, проходящая через $\forall M(x, f(x))$ ($a < x < b$), и она не параллельна Оу

О1. График $y = f(x)$ имеет на (a, b) **выпуклость, направленную вниз (вверх)**, если этот график в пределах (a, b) лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.

Т1. Если $y = f(x)$ имеет на (a, b) конечную 2-ую производную и если $f^{(2)}(x) \geq 0$ ($f^{(2)}(x) \leq 0$) всюду на (a, b) , то график функции $y = f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх).

Док-во. Пусть $f^{(2)}(x) \geq 0$ на (a, b) (для $f^{(2)}(x) \leq 0$ аналогично), $c - \forall$ точка из (a, b) . Уравнение касательной, проходящей через $M(c, f(c))$ (текущая ордината $-Y$): $Y - f(c) = f'(c)(x - c)$ **(1)**

Разложим $f(x)$ в окрестности c по формуле Тейлора при $n = 1$:

$$y = f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - c)^2 \quad (2)$$

где остаточный член в форме Лагранжа, ξ – между c и x . По условию $f(x)$ имеет 2-ую производную на $(a, b) \Rightarrow$ **(2)** справедливо для $\forall x \in (a, b)$. Из **(1)** и **(2)**:

$$y - Y = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x - c)^2 \quad (3)$$

Т.к. $f^{(2)}(x) \geq 0$ на (a, b) , то правая часть **(3)** неотрицательна $\Rightarrow$ для $\forall x \in (a, b)$: $y - Y \geq 0 \Rightarrow y \geq Y \Rightarrow$ график $y = f(x)$ на (a, b) лежит не ниже касательной **(1)**.

Т2. Пусть 2-я производная $y = f(x)$ непрерывна и положительна (отрицательна) в точке c . Тогда $\exists$ такая окрестность точки c , в пределах которой график функции $y = f(x)$ имеет выпуклость, направленную вниз (вверх).

Док-во. По теореме об устойчивости знака непрерывной функции $\exists$ окрестность точки c : в ее пределах $f^{(2)}(x) > 0$ (< 0). По Т1 график $f(x)$ имеет в этой окрестности выпуклость вниз (вверх). •

О2. Точка $M(c, f(c))$ графика функции $y = f(x)$ называется **точкой перегиба** этого графика, если $\exists$ такая окрестность точки c оси абсцисс, в пределах которой график $f(x)$ слева и справа от c имеет разные направления выпуклости.

Л1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет $f'(x)$ всюду в δ -окрестности точки c , причем $f'(x)$ непрерывна в точке c . Тогда, если график $f(x)$ имеет на интервале $(c, c + \delta)$ выпуклость, направленную вниз (вверх), то всюду в пределах $(c, c + \delta)$ этот график лежит не ниже (не выше) касательной к графику, проведенной в точке $M(c, f(c))$.

Док-во. Рассмотрим $\{x_n\} \in (c, c + \delta)$: $\{x_n\} \rightarrow c$. Через каждую $M_n(x_n, f(x_n))$ графика $y = f(x)$ проведем касательную:

$Y_n = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Т.к. график имеет на $(c, c + \delta)$ выпуклость, направленную вниз (вверх) $\Rightarrow$ для $\forall n$ и $\forall x \in (c, c + \delta)$: $f(x) - Y_n = f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) \geq 0$ (≤ 0) **(4)**

$f'(x)$ непрерывна в точке c ($\Rightarrow f(x)$ тоже) $\Rightarrow$ из определения непрерывности по Гейне $\exists$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n)\} = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$$

$\Rightarrow$ из **(4)** и Т* (Если элементы сходящейся $\{x_n\}$, начиная с некоторого n , удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$), то и предел a этой $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $a \geq b$ ($a \leq b$)):

$$f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) \geq 0 \quad (\leq 0)$$

Переходя в **(4)** к пределу при $n \rightarrow \infty$ и по Т*, получим:

$f(x) - Y \geq 0$ (≤ 0) для $\forall x \in (c, c + \delta)$, где Y – текущая ордината касательной **(1)**, проходящей через точку $M(c, f(c))$.

Л2. Пусть $y = f(x)$ имеет $f'(x)$ в некоторой окрестности точки c , причем $f'(x)$ непрерывна в точке c . Тогда, если график $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$, то в пределах достаточно малой δ -окрестности точки c этот график слева и справа от c лежит по разные стороны от касательной, проведенной через M .

Для док-ва выбрать $\delta > 0$ настолько малым, чтобы на каждом из $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$ график $y = f(x)$ имел определенное направление, и применить Л1 по каждому интервалу.

Т3 (необходимое условие перегиба). Если $y = f(x)$ имеет в точке c $f^{(2)}(c)$ и график $f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$, то $f^{(2)}(c) = 0$.

Док-во. Y – текущая ордината касательной $Y = f(c) + f'(c)(x - c)$, проходящей через $M(c, f(c))$. Функция $F(x) = f(x) - Y = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$, как и $f(x)$, имеет в точке c 2-ую производную ($\Rightarrow$ имеет $F'(x)$ в некоторой окрестности c , причем $F'(x)$ непрерывна в точке c).

По Л2 в малой окрестности точки c график $y = f(x)$ лежит слева и справа от c по разные стороны от касательной, проходящей через $M(c, f(c)) \Rightarrow F(x)$ в малой окрестности точки c имеет слева и справа от c разные знаки $\Rightarrow y = F(x)$ нет в c локального экстремума. Пусть $f^{(2)}(c) \neq 0 \Rightarrow$ т.к. $F'(x) = f'(x) - f'(c)$, $F^{(2)}(x) = f^{(2)}(x)$, то

$F'(c) = 0$, $F^{(2)}(c) \neq 0$ и $F(x)$ имеет в точке c локальный экстремум по Т (Пусть $f(x)$ имеет в данной точке c возможного экстремума конечную 2-ую производную. Тогда $f(x)$ имеет в точке c максимум, если $f^{(2)}(c) < 0$, и минимум, если $f^{(2)}(c) > 0$) $\Rightarrow f^{(2)}(c) = 0$.

1-е ДУП. Т4. Пусть $y = f(x)$ имеет $f^{(2)}(c)$ в некоторой окрестности точки c и $f^{(2)}(c) = 0$. Тогда, если в пределах этой окрестности $f^{(2)}(x)$ имеет разные знаки слева и справа от c , то график $f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$.

Док-во. Из условий $\Rightarrow \exists$ конечная $f'(c) \Rightarrow$ график $f(x)$ имеет касательную в $M(c, f(c))$. $f^{(2)}(x)$ слева и справа от c имеет разные знаки $\Rightarrow$ из Т1 $\Rightarrow$ направление выпуклости вокруг c различно.

2-е ДУП. Т5. Если $y = f(x)$ имеет в c конечную $f^{(3)}(c)$ и $f^{(2)}(c) = 0$, $f^{(3)}(c) \neq 0$, то график $f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$.

Док-во. Из $f^{(3)}(c) \neq 0$ и Т** (Если $f(x)$ дифференцируема в точке c и $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), то $f(x)$ возрастает (убывает) в c) $\Rightarrow f^{(2)}(x)$ либо возрастает, либо убывает в точке c . $f^{(2)}(c) = 0 \Rightarrow \exists$ такая окрестность точки c , в пределах которой $f^{(2)}(x)$ имеет разные знаки слева и справа от $c \Rightarrow$ по Т4 график $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$.

3-е ДУП. Т6. Пусть $n \geq 1$ – целое число и пусть функция $y = f(x)$ имеет производную порядка n в некоторой окрестности точки c и производную порядка $n+1$ в самой точке c . Пусть справедливы: $f^{(2)}(c) = f^{(3)}(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$, $f^{(n+1)}(c) \neq 0$ **(5)**

Тогда, если n – четное, график $y = f(x)$ имеет перегиб в $M(c, f(c))$.

Док-во. n – четное. При $n = 2$ это Т5. Пусть $n \geq 4$. Из $f^{(n+1)}(c) \neq 0$ и из Т**, примененной к функции $f^{(n)}(x) \Rightarrow f^{(n)}(x)$ или возрастает, или убывает в точке c . Т.к. $f^{(n)}(c) = 0 \Rightarrow \exists$ достаточно малая окрестность точки c , в пределах которой $f^{(n)}(x)$ справа и слева от c имеет разные знаки. Разложим $f^{(2)}(x)$ в окрестности точки c по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $\Rightarrow$ для $\forall x$ из достаточно малой окрестности точки c между c и x $\exists \xi$:

$$f^{(2)}(x) = f^{(2)}(c) + \frac{f^{(3)}(c)}{1!}(x - c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x - c)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x - c)^{n-2}$$

$$\text{Из (5)} \Rightarrow f^{(2)}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x - c)^{n-2} \quad (6)$$

Т.к. в пределах достаточно малой окрестности c $f^{(n)}(x)$ имеет разные знаки справа и слева от c и т.к. ξ лежит между c и x , то $f^{(n)}(\xi)$ (в силу четности n , и вся правая часть **(6)**) имеет разные знаки справа и слева от $c \Rightarrow f^{(2)}(x)$ в пределах малой окрестности c имеет разные знаки справа и слева от $c \Rightarrow$ по Т4 график $y = f(x)$ имеет перегиб в $M(c, f(c))$.

4. Понятие интегрируемости функции. Леммы Дарбу о верхних и нижних суммах.

Пусть $f(x)$ задана на $[a, b]$, $a < b$, T – разбиение $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на n частичных сегментов $[x_0, x_1]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. Пусть $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина сегмента. $\Delta = \max \Delta x_i$

01. Число $I\{x_i, \xi_i\}$, где

$$I\{x_i, \xi_i\} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется **интегральной суммой** $f(x)$, соответствующей данному разбиению T сегмента $[a, b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$.

02. Число I называется **пределом интегральных сумм** $I\{x_i, \xi_i\}$ при $\Delta \rightarrow 0$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: для $\forall$ разбиения T сегмента $[a, b]$, для которого $\Delta = \max \Delta x_i < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i на $[x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство $|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon$.

$$I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} I\{x_i, \xi_i\}$$

03. Ф-я $f(x)$ называется **интегрируемой (по Риману)** на $[a, b]$, если $\exists$ конечный предел I интегральных сумм $f(x)$ при $\Delta \rightarrow 0$. Предел I – **определенный интеграл** от $f(x)$ по $[a, b]$: $I = \int_a^b f(x) dx$

Утв. Неограниченная на $[a, b]$ ф-я $f(x)$ не интегрируема на $[a, b]$.

Док-во. $f(x)$ не ограничена на $[a, b] \Rightarrow$ она не ограничена на некотором $[x_{k-1}, x_k]$ $\forall$ данного разбиения $T[a, b] \Rightarrow$ слагаемое $f(\xi_k)\Delta x_k$ в $I\{x_i, \xi_i\}$ можно сделать как угодно большим по модулю за счет выбора $\xi_k \Rightarrow I\{x_i, \xi_i\}$ не ограничены $\Rightarrow \nexists$ конечного предела интегральных сумм.

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, T – разбиение $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, M_i и m_i – ТВГ и ТНГ $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$.

Суммы $S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ и $s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ называются **верхней и нижней суммами** $f(x)$ для данного T сегмента $[a, b]$.

Для $\forall I\{x_i, \xi_i\}$ разбиения T сегмента $[a, b]$: $s \leq I\{x_i, \xi_i\} \leq S$.

Свойства верхних и нижних сумм.

1°. Для $\forall$ фиксированного разбиения T и для $\forall \varepsilon > 0$ точки $\xi_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ можно выбрать так, что:

$$0 \leq S - I\{x_i, \xi_i^*\} < \varepsilon \quad (0 \leq I\{x_i, \xi_i^*\} - s < \varepsilon).$$

Пусть T – некоторое фиксированное разбиение $[a, b]$. По определению точной грани M_i для данного $\varepsilon > 0$ на $[x_{i-1}, x_i] \exists \xi_i^*$: $0 \leq M_i - f(\xi_i^*) < \varepsilon / (b-a)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Умножая эти неравенства на Δx_i и складывая, получим $0 \leq S - I\{x_i, \xi_i^*\} < \varepsilon$.

2°. Если разбиение T' сегмента $[a, b]$ получено путем добавления новых точек к точкам T , то $s \leq s'$, $S' \leq S$.

Пусть к T добавляется одна точка $x' \in [x_{i-1}, x_i]$, M_i' и M_i'' – ТВГ $f(x)$ на $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$, $\Delta x_i'$ и $\Delta x_i''$ – длины сегментов $\Rightarrow \Delta x_i = \Delta x_i' + \Delta x_i''$.

ТВГ на части $[x_{i-1}, x_i]$ не превосходит ТВГ M_i на всем сегменте $\Rightarrow$

$$M_i \geq M_i' \text{ и } M_i \geq M_i'' \Rightarrow S - S' = M_i \Delta x_i - (M_i' \Delta x_i' + M_i'' \Delta x_i'') = (M_i - M_i') \Delta x_i' + (M_i - M_i'') \Delta x_i'' \geq 0 \Rightarrow S' \leq S.$$

Для $s \leq s'$ ан-но.

3°. Пусть T' и T'' – $\forall$ разбиения $[a, b]$. Тогда: $s' \leq S'$, $s'' \leq S'$. $s' \leq S'$, $s'' \leq S''$. Пусть T – разбиение $[a, b]$: $T = T' \cup T''$, а S и s – верхняя и нижняя суммы разбиения $T \Rightarrow$ по св-ву 2°:

$$s' \leq s \leq S \leq S', \quad s'' \leq s \leq S \leq S' \Rightarrow s' \leq S'', s'' \leq S'.$$

4°. Мн-во $\{S\}$ верхних сумм данной $f(x)$ для всевозможных разбиений $[a, b]$ ограничено снизу. Мн-во $\{s\}$ нижних сумм – сверху. $\Rightarrow$ из 3°. $\forall S \geq$ некоторой фиксированной $s \Rightarrow \{S\}$ ограничено снизу. $\forall s \leq$ какой-либо верхней суммы $\Rightarrow \{s\}$ ограничено сверху.

Пусть $\bar{I}$ – ТНГ мн-ва $\{S\}$ верхних сумм, $\underline{I}$ – ТВГ множества $\{s\}$ нижних сумм: $\bar{I} = \inf \{S\}$, $\underline{I} = \sup \{s\}$. Числа $\bar{I}$ и $\underline{I}$ – **верхний и нижний интегралы Дарбу** от $f(x)$.

$\bar{I} \geq \underline{I}$. Пусть $\bar{I} \leq \underline{I} \Rightarrow \underline{I} - \bar{I} = \varepsilon > 0$. Т.к. $\bar{I}$ и $\underline{I}$ – точные грани $\Rightarrow \exists S'$ и s'' – верхняя и нижняя суммы некоторых разбиений T' и T'' сегмента $[a, b]$: $\bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} > S'$ и $\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < s''$. Вычитая 2-е неравенство из

1-ого и учитывая $\underline{I} - \bar{I} = \varepsilon \Rightarrow s'' > S' \Rightarrow$ противоречит св-ву 3°.

5°. Пусть разбиение T' сегмента $[a, b]$ получено из разбиения T добавлением к последнему p новых точек, и пусть s' , S' и s , S – нижние и верхние суммы разбиений T' и T . Тогда для разностей $S - S'$ и $s' - s$ (они ≥ 0 по св-ву 2°) можно получить оценку, зависящую от максимальной длины Δ частичных сегментов разбиения T , числа p добавленных точек и ТВГ и ТНГ M и m ф-и $f(x)$ на $[a, b]$: $S - S' \leq (M - m)p\Delta$, $s' - s \leq (M - m)p\Delta$

Пусть к разбиению T добавляется точка $x' \in [x_{i-1}, x_i]$, он разделится на $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$, $\Delta x_i'$ и $\Delta x_i''$ – длины сегментов $\Rightarrow \Delta x_i = \Delta x_i' + \Delta x_i''$.

Пусть M_i , M_i' и M_i'' – ТВГ $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$ $\Rightarrow$

$$S - S' = M_i \Delta x_i - (M_i' \Delta x_i' + M_i'' \Delta x_i'') = (M_i - M_i') \Delta x_i' + (M_i - M_i'') \Delta x_i''$$

Далее, $m \leq M_i' \leq M_i$ и $m \leq M_i'' \leq M_i \Rightarrow M_i - M_i' \leq M - m$ и $M_i - M_i'' \leq M - m \Rightarrow S - S' \leq$

$$(M - m)(\Delta x_i' + \Delta x_i'') \leq (M - m)\Delta x_i \leq (M - m)\Delta$$

Это 1-е неравенство св-ва 5° при $p = 1$. Для нижних сумм ан-но.

6° Лемма Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу $\bar{I}$ и $\underline{I}$ от $f(x)$ по $[a, b]$ являются с пределами верхних и нижних сумм при $\Delta \rightarrow 0$.

Докажем: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \bar{I}$

1) $M = m$, т.е. $f(x) = \text{const} \Rightarrow$ лемма очевидна, т.к. $S = \bar{I} = \underline{I} = s$.

2) $M > m$. Т.к. $\bar{I} = \text{ТНГ } \{S\} \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists T^* [a, b]$:

$$S^* - \bar{I} < \varepsilon/2. \quad (1)$$

Пусть p – число точек T^* , лежащих строго внутри $[a, b]$. Пусть T – $\forall$ разбиение $[a, b]$: $\Delta < \delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$ (2) и S – верхняя сумма T .

Добавим к T внутренние точки $T^* \Rightarrow$ получим разбиение T' , верхняя сумма S' которого по св-ву 5° и условию (2):

$$0 \leq S - S' \leq (M - m)p\Delta < \varepsilon/2 \quad (3)$$

Но T' можно рассматривать как разбиение, полученное в результате добавления к T^* внутренних точек $T = \sup$ по св-ву 2°:

$$\bar{I} \leq S' \leq S^* \Rightarrow 0 \leq S - \bar{I} \leq S^* - \bar{I} \Rightarrow \text{из (1): } 0 \leq S - \bar{I} \leq \varepsilon/2$$

Складывая это неравенство с (3), получим $0 \leq S - \bar{I} \leq \varepsilon$. (4)

Т.о., для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ (см (2)): верхние суммы S разбиений T сегмента $[a, b]$, для которых $\Delta < \delta$ (см. (2)), удовлетворяют неравенству (4) $\Rightarrow$ верхний интеграл Дарбу является пределом верхних сумм. Для нижних сумм док-во ан-но.

5. Необходимое и достаточное условие интегрируемости.

Пусть $f(x)$ задана на $[a, b]$, $a < b$, T – разбиение $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на n частичных сегментов $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Пусть $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина сегмента. $\Delta = \max \Delta x_i$

О1. Число $I \{x_i, \xi_i\}$, где

$$I \{x_i, \xi_i\} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется **интегральной суммой** функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению T сегмента $[a, b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$.

О2. Число I называется **пределом интегральных сумм** $I \{x_i, \xi_i\}$ при $\Delta \rightarrow 0$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: для $\forall$ разбиения T сегмента $[a, b]$, для которого $\Delta = \max \Delta x_i < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i на $[x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство $|I \{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon$.

$$I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} I \{x_i, \xi_i\}$$

О3. Ф-я $f(x)$ называется **интегрируемой (по Риману)** на $[a, b]$, если $\exists$ конечный предел I интегральных сумм $f(x)$ при $\Delta \rightarrow 0$. Предел I –

определенный интеграл от $f(x)$ по $[a, b]$: $I = \int_a^b f(x) dx$

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, T – разбиение $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, M_i и m_i – ТВГ и ТНГ $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$.

Суммы $S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ и $s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ называются **верхней и нижней суммами** $f(x)$ для данного T сегмента $[a, b]$.

Для $\forall I \{x_i, \xi_i\}$ разбиения T сегмента $[a, b]$: $s \leq I \{x_i, \xi_i\} \leq S$.

Пусть $\bar{I}$ – ТНГ мн-ва $\{S\}$ верхних сумм, $\underline{I}$ – ТВГ множества $\{s\}$ нижних сумм: $\bar{I} = \inf \{S\}$, $\underline{I} = \sup \{s\}$. Числа $\bar{I}$ и $\underline{I}$ – **верхний и нижний интегралы Дарбу** от $f(x)$.

$\bar{I} \geq \underline{I}$. Пусть $\bar{I} \leq \underline{I} \Rightarrow \underline{I} - \bar{I} = \varepsilon > 0$. Т.к. $\bar{I}$ и $\underline{I}$ – точные грани $\Rightarrow \exists$

S' и s'' – верхняя и нижняя суммы некоторых разбиений T' и T'' сегмента $[a, b]$: $\bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} > S'$ и $\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < s''$. Вычитая 2-е неравенство из

1-ого и учитывая $\underline{I} - \bar{I} = \varepsilon > s'' > S' \Rightarrow$ противоречит св-ву (Пусть T' и $T'' \in \forall$ разбиения $[a, b]$. Тогда:

$s' \leq S''$, $s'' \leq S'$.)

Лемма Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу $\bar{I}$ и $\underline{I}$ от $f(x)$ по $[a, b]$ являются с пределами верхних и нижних сумм при $\Delta \rightarrow 0$.

Т. Чтобы ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T сегмента $[a, b]$, для которого $S - s \leq \varepsilon$.

1) **Необходимость.** Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, I – предел интегральных сумм $f(x) \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, что для $\forall$ разбиения T , где $\Delta < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i на частичных сегментах выполняется: $|I \{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon/4$. (1)

Зафиксируем одно такое разбиение T . По св-ву 1° (Для $\forall$ фиксированного T и для $\forall \varepsilon > 0$ точки ξ_i^* на $[x_{i-1}, x_i]$ можно выбрать так, что $0 \leq S - I \{x_i, \xi_i^*\} < \varepsilon$ ($0 \leq I \{x_i, \xi_i^*\} - s < \varepsilon$) для данного T можно указать такие 2 интегральные суммы, что

$$S - I \{x_i, \xi_i^*\} < \varepsilon/4, \quad I \{x_i, \xi_i^*\} - s < \varepsilon/4 \quad (2)$$

Обе $I \{x_i, \xi_i^*\}$ и $I \{x_i, \xi_i^*\}$ удовлетворяют (1).

$S - s = (S - I \{x_i, \xi_i^*\}) + (I \{x_i, \xi_i^*\} - I) + (I - I \{x_i, \xi_i^*\}) + (I \{x_i, \xi_i^*\} - s) \Rightarrow$ учитывая (1) и (2): $S - s < \varepsilon$

2) **Достаточность.** Для $\forall T$: $s \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S$ и для $\forall \varepsilon > 0$, по условию теоремы, $\exists T$: $S - s \leq \varepsilon \Rightarrow 0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq \varepsilon \Rightarrow$ в силу произвольности ε :

$\bar{I} = \underline{I} = I$. Докажем, что число I является пределом интегральных сумм $f(x)$. По лемме Дарбу это число I – общий предел при $\Delta \rightarrow 0$ верхних и нижних сумм $\Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$: при $\Delta < \delta$: $I - s < \varepsilon/2$ и $S - I < \varepsilon/2$, т.е. при $\Delta < \delta$, $S - s < \varepsilon$, и $s \leq I \leq S$. Для $\forall I \{x_i, \xi_i\}$ данного T : $s \leq I \{x_i, \xi_i\} \leq S$.

Т.о., при $\Delta < \delta$ обе величины I и $I \{x_i, \xi_i\}$ заключены между числами s и S , разность между которыми меньше $\varepsilon \Rightarrow$ при $\Delta < \delta$:

$|I \{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon \Rightarrow$ число I есть предел интегральных сумм.

Иная форма необх. и достаточного условия интегрируемости.

Пусть M_i и m_i – точные грани функции $f(x)$ на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$.

Число $\omega_i = M_i - m_i \geq 0$ – **колебание функции** $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$.

$$S - s = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$$

Каждое слагаемое в последней сумме неотрицательно.

Чтобы $f(x)$ была интегрируемой на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T сегмента $[a, b]$, для которого $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq \varepsilon$

6. Классы интегрируемых функций

О. Ф-я $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на $\{x\}$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: для $\forall x', x'' \in \{x\}$: $|x'' - x'| < \delta$, выполняется $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Т1. Непрерывная на $[a, b]$ $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Сл. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: на $\forall [c, d] \in [a, b]$: $d - c < \delta$, колебание $f(x)$ $\omega = M - m < \varepsilon$ (M и m – точные грани $f(x)$ на сегменте $[c, d]$).

Т2. Чтобы ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение T сегмента $[a, b]$, для которого $S - s \leq \varepsilon$.

Т3. Непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Док-во. Пусть дано $\forall \varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$ для $\varepsilon/(b-a) > 0 \exists \delta > 0$, что при разбиении T $[a, b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, длины которых $\Delta x_i < \delta$, колебание $f(x)$ на $\forall [x_{i-1}, x_i]$ $\omega_i = M_i - m_i < \varepsilon/(b-a)$ (по следствию из Т1) $\Rightarrow$ для таких разбиений T

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ по Т2 $f(x)$ интегрируема.

Т4. Если функция $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b]$ и если для $\forall \varepsilon > 0$ можно указать конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва этой функции и имеющих общую сумму длин меньше ε , то $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Док-во. Пусть дано $\forall \varepsilon > 0$. Покроем точки разрыва $f(x)$ конечным числом интервалов, сумма длин которых меньше $\varepsilon/2(M-m)$,

M и m – ТВГ и ТНГ $f(x)$ на $[a, b]$. Точки сегмента, не принадлежащие указанным интервалам, образуют множество, состоящее из конечного числа непересекающихся сегментов. На каждом из них $f(x)$ непрерывна $\Rightarrow$ равномерно непрерывна. Разобьем каждый такой сегмент так, чтобы колебание $f(x)$ на $\forall$ частичном сегменте разбиения $\omega_i < \varepsilon/2(b-a)$. Объединяя эти разбиения и интервалы, покрывающие точки разрыва функции $f(x)$, мы получим разбиение T всего $[a, b]$. Для этого разбиения слагаемые суммы $S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$ разделяются на две группы: 1) все слагаемые, отвечающие частям разбиения T , образованным из интервалов, покрывающих точки разрыва, их колебания

$\omega_i = M_i - m_i \leq M - m \Rightarrow$

$$\sum_1 \omega_i \Delta x_i \leq (M - m) \sum_1 \Delta x_i < (M - m) \frac{\varepsilon}{2(M - m)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

2) остальные слагаемые: $\omega_i < \varepsilon/2(b-a) \Rightarrow$

$$\sum_2 \omega_i \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_2 \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_1 \omega_i \Delta x_i + \sum_2 \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ по Т1 $f(x)$ интегрируема.

Сл. Ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$, имеющая лишь конечное число точек разрыва, интегрируема на этом сегменте. В частности, кусочно непрерывная на данном сегменте функция интегрируема на этом сегменте.

Если p – число точек разрыва, то достаточно покрыть каждую точку разрыва интервалом длины $\varepsilon/2p$

Т5. Монотонная на $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте.

Док-во. Если функция монотонна на $[a, b]$, то ее значения заключены между $f(a)$ и $f(b)$ $\Rightarrow$ функция ограничена на этом сегменте. Докажем теорему для неубывающей на $[a, b]$ функции $f(x)$. Зададим $\forall \varepsilon > 0$ и разобьем $[a, b]$ на равные части, длины которых меньше $\varepsilon/(f(b) - f(a))$ и т.к. для неубывающей $f(x)$:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = f(b) - f(a) \Rightarrow$$

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n \omega_i = \varepsilon$$

7. Основные свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Формулы среднего значения.

$$1^\circ. \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (1) \quad 2^\circ. \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

3°. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$. Тогда $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ и $f(x) g(x)$ также интегрируемы на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (3)$$

Док-во. При $\forall$ разбиении $[a, b]$ и $\forall$ выборе точек ξ_i для:

$$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$$

=> т.к. $\exists$ предел правой части, то $\exists$ предел левой части =>

$f(x) \pm g(x)$ интегрируема и верна (3).

$f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ => они ограничены на $[a, b]$:

$|f(x)| \leq A$ и $|g(x)| \leq B$. Пусть $T - \forall$ заданное разбиение $[a, b]$, x' и x'' – произвольные точки $[x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f(x'') g(x'') - f(x') g(x') = [f(x'') - f(x')] g(x'') + [g(x'') - g(x')] f(x')$

Т.к. $|f(x'') g(x'') - f(x') g(x')| \leq \omega_i$, $|f(x'') - f(x')| \leq \omega_i^1$,

$|g(x'') - g(x')| \leq \omega_i^2$, где $\omega_i, \omega_i^1, \omega_i^2$ – колебания $f(x) g(x), f(x), g(x)$ на $[x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \omega_i \leq B \omega_i^1 + A \omega_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq B \sum_{i=1}^n \omega_i^1 \Delta x_i + A \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \Delta x_i$

$f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение T :

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^1 \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2B} \text{ и } \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2A}$$

=> для этого T : $S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < B \frac{\varepsilon}{2B} + A \frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon \Rightarrow$

$f(x) g(x)$ – интегрируемая функция

4°. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $c f(x)$ ($c = \text{const}$) тоже:

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad (4)$$

Т.к. интегральные суммы $f(x)$ и $c f(x)$ отличаются на $\text{const } c$

5°. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $\forall [c, d] \in [a, b]$.

Док-во. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение $T[a, b]$, что $S - s \leq \varepsilon$. Добавим к точкам T точки c и d . В силу св-ва 2° верхних и нижних сумм (Если разбиение $T'[a, b]$ получено путем добавления новых точек к точкам T , то $s \leq s', S' \leq S$) для полученного разбиения T^* тем более справедливо неравенство $S - s < \varepsilon$. Разбиение T^* сегмента $[a, b]$ порождает разбиение T_1 сегмента $[c, d]$. Если S_1 и s_1 – верхняя и нижняя суммы разбиения T_1 , то $S_1 - s_1 \leq S - s$, т.к. каждое слагаемое $\omega_i \Delta x_i > 0$ в выражении $S_1 - s_1 = \sum \omega_i \Delta x_i$ будет также слагаемым в выражении для $S - s \Rightarrow S_1 - s_1 < \varepsilon \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[c, d]$.

6°. Пусть $f(x)$ интегрируема на сегментах $[a, c]$ и $[c, b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (5)$$

1) $a < c < b$. $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b] \Rightarrow \exists$ такие разбиения этих сегментов, что $S - s < \varepsilon/2$ для каждого из них. Объединяя эти разбиения, мы получим разбиение $[a, b]$, для которого $S - s < \varepsilon \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Будем включать точку c в число делящих точек при $\forall$ разбиении $[a, b] \Rightarrow$ интегральная сумма для $f(x)$ на $[a, b]$ равна сумме интегральных сумм для этой функции на $[a, c]$ и $[c, b] \Rightarrow$ в пределе получим (5).

2) точка c лежит вне сегмента $[a, b] \Rightarrow$ сегмент $[a, b]$ есть часть сегмента $[a, c]$ или $[c, b] \Rightarrow$ по св-ву 5° $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Пусть $a < b < c$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

=> по св-ву 2° получим (5). Для $c < a < b$ аналогично.

Оценки интегралов.

1°. Пусть интегрируемая на $[a, b]$ функция $f(x) \geq 0$ на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$\forall$ интегр. сумма $\geq 0 \Rightarrow$ предел интегр. сумм $I = \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

31. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geq m$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq m(b - a).$$

$f(x) - m \geq 0$ и интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b [f(x) - m] dx \geq 0 \Rightarrow$ по св.3°:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b - a)$$

2°. Если $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и $\neq 0$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq c > 0 \quad (6)$$

$f(x)$ неотрицательна и $\neq 0 \Rightarrow$ на $[a, b] \exists \xi: f(\xi) = 2k > 0 \Rightarrow$ по теореме об устойчивости знака непрерывной функции $\exists [p, q]$,

$\xi \in [p, q]$ и в пределах $[p, q] f(x) \geq k > 0 \Rightarrow$ по 31:

$$\int_p^q f(x) dx \geq k(q - p) > 0. \text{ По св-ву } 6^\circ$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^q f(x) dx + \int_q^b f(x) dx$$

=> т.к. $f(x) \geq 0$ и $\int_p^q f(x) dx \geq c > 0$, где $c = k(q - p)$ получаем (6)

3°. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \quad (7)$$

Функция $f(x) - g(x) \geq 0$ и интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ (7) по св-ву 1° 32.

Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (8)$$

Пусть M_i и m_i – точные грани $f(x)$, M_i' и m_i' – точные грани $|f(x)|$ на $[x_{i-1}, x_i]$. Легко убедиться, что $M_i' - m_i' \leq M_i - m_i$ (рассмотреть случаи:

1) $M_i, m_i \geq 0$, 2) $M_i, m_i \leq 0$, 3) $M_i > 0, m_i \leq 0$) => $S_1 - s_1 \leq S - s \Rightarrow$ если для некоторого разбиения

$S - s < \varepsilon$, то для него $S_1 - s_1 < \varepsilon \Rightarrow |f(x)|$ интегрируема.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow$$

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow (8)$$

4°. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $g(x) \geq 0$. Тогда, если M и m – точные грани $f(x)$ на $[a, b]$, то:

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \quad (9)$$

=> из того, что для $\forall x \in [a, b]: m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x)$ и оценки 3° и св-ва 4°.

1-я формула среднего значения. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и пусть m и M – точные грани $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда $\exists \mu$, где

$$m \leq \mu \leq M, \text{ что } \int_a^b f(x) dx \geq \mu(b - a) \quad (10)$$

В (9) положим $g(x) = 1$ и учитывая, что $\int_a^b 1 dx = (b - a) \Rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$

Обозначим $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow$ получим (10).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists p, q \in [a, b]$, что $f(p) = m$ и $f(q) = M$ (по 2-й теореме Вейерштрасса) => по теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение $\exists \xi \in [p, q] (\Rightarrow \xi \in [a, b]): f(\xi) = \mu \Rightarrow$ (10) примет вид

1-й формулы среднего значения:

$$\int_a^b f(x) dx \geq f(\xi)(b - a) \quad (11)$$

1-я формула среднего значения в обобщенной форме (13). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и m и M – точные грани $f(x)$ на $[a, b]$. Пусть $g(x) \geq 0$ (или $g(x) \leq 0$) на всем $[a, b]$. Тогда $\exists \mu$, где $m \leq \mu \leq M$, что

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx \quad (12)$$

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(x) g(x) dx =$

$$f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (13)$$

Если $\int_a^b g(x) dx = 0 \Rightarrow$ в силу (9), $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0 \Rightarrow$ в качестве

μ можно взять $\forall$ число. Если $\int_a^b g(x) dx > 0 \Rightarrow$ разделив все части

неравенств (9) на $\int_a^b g(x) dx$, получим

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M, \text{ пусть } \mu = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

=> получим (12).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для $\forall \mu$, где $m \leq \mu \leq M$,

$\exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = \mu \Rightarrow$ (12) переходит в (13).

2-я формула среднего значения (формула Бонне). Если на $[a, b]$ функция $g(x)$ монотонна, а $f(x)$ интегрируема, то $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx$$

8. Основная формула интегрального исчисления. Формулы замены переменного и интегрирования по частям.

Пусть $f(x)$ интегрируема на $\forall$ сегменте, содержащемся в (a, b) и c – некоторая фиксированная точка (a, b) . Тогда для $\forall x \in (a, b)$ $f(x)$ интегрируема на $[c, x] \Rightarrow$ на (a, b) определена функция

$F(x) = \int_c^x f(t) dt$ – **интеграл с переменным верх. пределом.**

Т1. Любая непрерывная на интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет на этом интервале первообразную. Одной из первообразных является ф-я $F(x) = \int_c^x f(t) dt$, где c – $\forall$ фиксированная точка из (a, b) .

Док-во. Достаточно доказать, что для $\forall$ фиксированного $x \in (a, b)$ $\exists$ предельное значение

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

По св-ву 6° определенных интегралов:

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) - F(x) &= \int_c^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \\ &= (\text{по 1-й формуле среднего значения}) \\ &= f(\xi) \Delta x \end{aligned}$$

где ξ – число между числами x и $x + \Delta x$. $f(x)$ непрерывна в точке $x \Rightarrow$ при $\Delta x \rightarrow 0$ $f(\xi) \rightarrow f(x) \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$$

31. Аналогично доказывается теорема о существовании первообразной у непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции, а в качестве нижнего предела интегрирования c можно взять a .

32. При док-ве Т1 установлено существование производной от интеграла с переменным верхним пределом и доказано, что эта производная равна подынтегральной функции

$$\frac{d}{dx} \left(\int_c^x f(t) dt \right) = f(x)$$

33. Если $f(x)$ интегрируема на $\forall$ сегменте, содержащемся в (a, b) , то интеграл с переменным верхним пределом является непрерывной на (a, b) функцией от верхнего предела. Докажем, что приращение $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$ функции $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$. В силу $\int_a^b f(x) dx \geq \mu(b - a)$:

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \mu \Delta x,$$

где число μ лежит между ТВГ и ТНГ гранями $f(x)$ на $[x, x + \Delta x] \Rightarrow \Delta F \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Основная формула интегрального исчисления. Любые 2 первообразные данной $f(x)$ отличаются на постоянную $\Rightarrow$ согласно Т1 и З1, можно утверждать, что $\forall$ первообразная $\Phi(x)$ непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ имеет вид:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C$$

где C – некоторая постоянная.

Полагая в этой формуле сначала $x = a$, а затем $x = b$ и используя св-во 1° определенных интегралов:

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= C, \quad \Phi(b) = \int_a^b f(t) dt + C \Rightarrow \\ \int_a^b f(t) dt &= \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^b \quad (1) \end{aligned}$$

это **основная формула интегрального исчисления** (формула Ньютона — Лейбница).

Замена переменной под знаком определенного интеграла.

Пусть выполнены условия:

- 1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$
- 2) $[a, b]$ является множеством значений некоторой функции $x = g(t)$, определенной на $\alpha \leq t \leq \beta$ и имеющей на этом сегменте непрерывную производную;
- 3) $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$.

Тогда справедлива формула замены переменной под знаком определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt \quad (2)$$

Рассмотрим некоторую первообразную $\Phi(x)$ функции $f(x)$. По (1):

$$\int_a^b f(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (3)$$

Т.к. $\Phi(x)$ и $x = g(t)$ дифф-мы на соответствующих сегментах, то сложная функция $\Phi(g(t))$ диф-ма на $[\alpha, \beta] \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \Phi(g(t)) = \Phi'(g(t)) g'(t)$$

причем Φ' вычисляется по аргументу x : $\Phi'(g(t)) = \Phi'(x)$, где $x = g(t)$. Т.к. $\Phi'(x) = f(x) \Rightarrow \Phi'(g(t)) = f(g(t)) \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \Phi(g(t)) = f(g(t)) g'(t)$$

$\Rightarrow \Phi(g(t))$, определенная и непрерывная на $[\alpha, \beta]$, является на $[\alpha, \beta]$ первообразной для $f(g(t))g'(t) \Rightarrow$ из (1) и $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$

$$\int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Сравнивая последнюю формулу с (3), получаем (2).

Формула интегрирования по частям. Пусть u и v (х) имеют непрерывные производные на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx \quad (4)$$

[т.к. $v'(x) dx = dv, u'(x) dx = du] \Rightarrow$

$$\int_a^b u dv = [uv] \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (5)$$

$u(x)v(x)$ является первообразной для $u(x)v'(x) + v(x)u'(x) \Rightarrow$ в силу (1):

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)] dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b$$

$\Rightarrow$ по св-ву 3° определенных интегралов получим (4) и (5).

9. Понятие длины плоской кривой. Формулы для вычисления длины дуги кривой.

Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$. Если рассматривать t как время, то эти функции определяют закон движения по плоскости точки M с координатами: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ (1)
Мн-во $\{M\}$ всех точек M , координаты x и y которых определяются уравнениями (1), называется **простой плоской кривой** L , если различным значениям параметра t из $[\alpha, \beta]$ отвечают различные точки этого мн-ва.

Простая замкнутая кривая $L = L_1 \cup L_2$, где L_1 и L_2 – 2 простые кривые: 1) их граничные точки совпадают; 2) их $\forall$ не граничные точки различны.

Пусть мн-во $\{t\}$ – сегмент | полусегмент | интервал | числовая прямая | открытая или замкнутая полупрямая.

Разбиение $\{t\}$: конечная или бесконечная система сегментов $\{[t_{i-1}, t_i]\}$ разбивает $\{t\}$, если: 1) объединение всех сегментов – все множество $\{t\}$; 2) общие точки $\forall$ двух сегментов – лишь их концы.

Параметрическое задание кривой. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $\{t\}$. Уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ задают **параметрически** кривую L , если $\exists$ такая система сегментов $\{[t_{i-1}, t_i]\}$, разбивающих множество $\{t\}$, что для значений t из каждого данного сегмента этой системы эти уравнения определяют простую кривую.

Длина дуги кривой. Пусть кривая L задается параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где t изменяется на $[\alpha, \beta]$.

Пусть T – $\forall$ разбиение $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$. $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ – соответствующие точки кривой $L \Rightarrow$ ломаная $M_0M_1M_2 \dots M_n$ вписана в кривую L и отвечает данному разбиению T . Длина l_i звена

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}$$

$\Rightarrow$ длина всей ломаной

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2} \quad (2)$$

О1. Если мн-во $\{l(t_i)\}$ длин вписанных в кривую L ломаных, отвечающих всевозможным разбиениям T сегмента $[\alpha, \beta]$, ограничено, то кривая L называется **спрямляемой**, а ТВГ l мн-ва $\{l(t_i)\}$ называется **длиной дуги** кривой L .

Лемма. Пусть $l^*(t_i)$ – длина ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей разбиению T^* сегмента $[\alpha, \beta]$, $l(t_i)$ – длина ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей разбиению T , полученному из разбиения T^* посредством добавления нескольких новых точек. Тогда $l^*(t_i) \leq l(t_i)$.

Док-во. Пусть к T^* добавляется 1 точка γ . Ломаная, отвечающая T , отличается от ломаной, отвечающей T^* , тем, что 1 звено $M_{i-1}M_i$ заменяется двумя звеньями $M_{i-1}C$ и CM_i . Т.к. длина стороны $M_{i-1}M_i$ треугольника $M_{i-1}CM_i$ не превосходит суммы длин двух других его сторон, то $l^*(t_i) \leq l(t_i)$.

Достаточные условия спрямляемости кривой.

Т1. Если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ имеют на $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные, то кривая L , определяемая параметрическими уравнениями (1), спрямляема и длину l ее дуги можно вычислить по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \quad (3)$$

Док-во. 1) Докажем, что кривая L спрямляема.

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ имеют на $[\alpha, \beta]$ производные $\Rightarrow$ по Т. Лагранжа:

$$\begin{aligned} \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) &= \varphi'(t_i) \Delta t_i, & \text{где } t_{i-1} < t_i < t_i \\ \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) &= \psi'(t_i) \Delta t_i, & \text{где } t_{i-1} < t_i^* < t_i \end{aligned}$$

Подставим в (2):

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i)} \Delta t_i \quad (4)$$

Т.к. производные $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны $\Rightarrow$ эти производные ограничены $\Rightarrow \exists M$: для $\forall t \in [\alpha, \beta]$: $|\varphi'(t)| \leq M$ и $|\psi'(t)| \leq M \Rightarrow$ из (4)

$$0 < l(t_i) \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{M^2 + M^2} \Delta t_i = M\sqrt{2} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = M\sqrt{2}(\beta - \alpha)$$

$\Rightarrow$ мн-во $\{l(t_i)\}$ длин вписанных в L ломаных, отвечающих всевозможным T сегмента $[\alpha, \beta]$, ограничено $\Rightarrow L$ спрямляема.

2) Пусть l – длина L . Правая часть (4) похожа на интегр. сумму

$$I\{t_i, t_i\} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i)} \Delta t_i \quad (5)$$

интегрируемой функции $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$, причем эта $I\{t_i, t_i\}$ отвечает разбиению T сегмента $[\alpha, \beta]$ и данному выбору точек t_i на $[t_{i-1}, t_i]$.

Докажем: для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что при $\Delta < \delta$ ($\Delta = \max \Delta t_i$):

$$|I(t_i) - l| < \varepsilon/2 \quad (6)$$

где $I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$ – предел при $\Delta \rightarrow 0$ интегральных сумм (5). Т.е., докажем, что при достаточно «мелких» разбиениях T сегмента $[\alpha, \beta]$ длины $l(t_i)$ ломаных, вписанных в L , и отвечающих этим разбиениям, как угодно мало отличаются от интеграла I , стоящего в правой части (3).

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i)} - \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i)} \right| &\leq \\ &\leq |\psi'(t_i) - \psi'(t_i^*)| \leq M_i - m_i \quad (7) \end{aligned}$$

где M_i и m_i – точные грани $\psi'(t)$ на $[t_{i-1}, t_i]$. В силу (4), (5) и (7):

$$\begin{aligned} |l(t_i) - I\{t_i, t_i\}| &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i^*)} - \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i)} \right) \Delta t_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i^*)} - \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i)} \right| \Delta t_i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta t_i = S - s \quad (8) \end{aligned}$$

где S и s – верхняя и нижняя суммы $\psi'(t)$ для разбиения $[\alpha, \beta]$. Т.к.

φ и $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ и $\psi'(t)$ интегрируемы на $[\alpha, \beta]$ (это $\Rightarrow$ из непрерывности $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$), то из определения интегрируемости и из теоремы (Чтобы ограниченная на $[a, b]$ $f(x)$ была интегрируемой на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists T$ сегмента $[a, b]$, для которого $S - s \leq \varepsilon$) $\Rightarrow$ что для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что при $\Delta < \delta$ ($\Delta = \max \Delta t_i$) выполняются:

$$|I\{t_i, t_i\} - I| < \varepsilon/4 \text{ и } S - s < \varepsilon/4 \quad (9)$$

$\Rightarrow$ при $\Delta < \delta$ в силу (8) и (9):

$|l(t_i) - I| = |l(t_i) - I\{t_i, t_i\} + I\{t_i, t_i\} - I| \leq$
 $\leq |l(t_i) - I\{t_i, t_i\}| + |I\{t_i, t_i\} - I| \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 \Rightarrow$ (6) 3) Докажем, что среди всевозможных ломаных, длины $l(t_i)$ которых удовлетворяют (6), имеются ломаные, длины которых отличаются от длины l дуги кривой L меньше чем на $\varepsilon/2$.

Т.к. l – ТВГ $\{l(t_i)\}$ длин ломаных, вписанных в L , и отвечающих всевозможным разбиениям $[\alpha, \beta]$, то $\exists T^*$ сегмента, что длина $l^*(t_i)$ соответствующей ломаной: $0 \leq l - l^*(t_i) < \varepsilon/2$ (10).

Разобьем каждый $[t_{i-1}, t_i]$ разбиения T^* на столь мелкие части, чтобы максимальная длина разбиения полученного объединением указанных разбиений была $\Delta < \delta$. Длина $l(t_i)$ ломаной, отвечающей разбиению T , удовлетворяет (6). Т.к. вершины ломаной, отвечающей разбиению T^* , являются также вершинами ломаной, отвечающей разбиению T , то по лемме:

$$0 < l^*(t_i) \leq l(t_i) \leq l \Rightarrow \text{в силу (10): } 0 \leq l - l(t_i) < \varepsilon/2 \quad (11)$$

Из (6) и (11) $\Rightarrow |l - I| < \varepsilon \Rightarrow$ в силу произвольности $\varepsilon \Rightarrow l = I$.

Замечание. Если кривая L является графиком функции $y = f(x)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$, то кривая L спрямляема и длина l дуги L может быть найдена по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (12)$$

График этой функции – кривая, определяемая уравнениями $x = t$, $y = f(t)$, $a \leq t \leq b$ и выполнены все условия Т1 $\Rightarrow$ полагая в (3) $\varphi(t) = t$, $y = f(t)$ и заменяя t на x , мы получим (12).

Если кривая L определяется полярным уравнением $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ и $r(\theta)$ имеет на $[\theta_1, \theta_2]$ непрерывную производную, то кривая L спрямляема и длину l дуги L можно найти по формуле

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta \quad (13)$$

Для док-ва перейти от полярных координат к декартовым:

$x = r(\theta) \cos \theta$, $y = r(\theta) \sin \theta$ – это параметрические уравнения, функции $\varphi = r(\theta) \cos \theta$, $\psi = r(\theta) \sin \theta$ удовлетворяют условиям Т1. Подставляя их в (3), получим (13).

10. Понятие квадратуемости плоской фигуры. Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора.

Плоская фигура Q – части плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой L . Кривая L – граница фигуры Q . *Многоугольник* – часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной линией.

Многоугольник *вписан* в фигуру Q , если $\forall$ точка этого многоугольника принадлежит Q или ее границе. Если все точки плоской фигуры и ее границы принадлежат некоторому многоугольнику, то указанный многоугольник *описан* вокруг Q . Площадь $\forall$ вписанного в Q многоугольника не больше площади $\forall$ описанного вокруг Q многоугольника.

Пусть $\{S_i\}$ – мн-во площадей вписанных в Q многоугольников, а $\{S_d\}$ – мн-во площадей описанных вокруг Q многоугольников. $\{S_i\}$ ограничено сверху (площадью $\forall$ описанного вокруг Q многоугольника), а множество $\{S_d\}$ ограничено снизу (напр., 0).

Пусть $\underline{P}$ – ТВГ $\{S_i\}$, а $\overline{P}$ – ТНГ $\{S_d\}$. $\underline{P}$ и $\overline{P}$ – *нижняя и верхняя площадь* Q .

$\underline{P} \leq \overline{P}$. Пусть $\underline{P} \geq \overline{P} \Rightarrow$ полагая $\frac{\underline{P}-\overline{P}}{2} = \varepsilon > 0$ и по определению точных граней, $\exists$ вписанный в Q многоугольник, площадь S_i которого будет больше числа $\underline{P} - \varepsilon = \frac{\underline{P}+\overline{P}}{2}$, т. е. $\frac{\underline{P}+\overline{P}}{2} < S_i$, и описанный вокруг фигуры Q многоугольник, площадь S_d которого меньше числа $\overline{P} + \varepsilon = \frac{\underline{P}+\overline{P}}{2}$, т. е. $S_d < \frac{\underline{P}+\overline{P}}{2} \Rightarrow S_d < S_i$ – противоречие.

О. *Плоская фигура* Q называется **квадрируемой**, если верхняя площадь $\overline{P}$ этой фигуры совпадает с ее нижней площадью $\underline{P}$. Число $P = \underline{P} = \overline{P}$ называется **площадью** Q .

Т1. *Чтобы плоская фигура* Q *была* **квадрируемой**, *необходимо и достаточно, чтобы для* $\forall \varepsilon > 0 \exists$ *такие описанный и вписанные многоугольник для* Q : $S_d - S_i < \varepsilon$.

Док-во. 1) Необходимость. Пусть Q **квадрируема**, т. е. $P = \underline{P} = \overline{P}$. Т.к. $\underline{P}$ и $\overline{P}$ – ТВГ и ТНГ для $\{S_i\}$ и $\{S_d\}$, то для $\forall$ числа $\varepsilon > 0 \exists$ вписанный в Q многоугольник: $P - S_i < \varepsilon/2$, и описанный: $S_d - P < \varepsilon/2 \Rightarrow S_d - S_i < \varepsilon$.

2) Дост-сть. Пусть S_d и S_i – площади многоугольников, для которых $S_d - S_i < \varepsilon$. Т.к. $S_i \leq \underline{P} \leq \overline{P} \leq S_d$, то $\overline{P} - \underline{P} < \varepsilon$. Т.к. ε произвольно $\Rightarrow \underline{P} = \overline{P} \Rightarrow$ фигура **квадрируема**.

Граница плоской фигуры Q *имеет площадь, равную 0*, если для $\forall \varepsilon > 0$ для $Q \exists$ описанный и вписанный многоугольники, разность площадей которых: $S_d - S_i < \varepsilon \Rightarrow$ Т1: *чтобы плоская фигура* Q *была* **квадрируемой**, *необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела площадь, равную 0*.

Криволинейной трапецией (КТ) называется фигура, ограниченная графиком заданной на $[a, b]$ непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$, ординатами, проведенными в точках a и b , и отрезком оси Ox между точками a и b .

Криволинейная трапеция – **квадрируемая фигура**, ее *площадь*

$$P = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Док-во. Т. к. непрерывная на $[a, b]$ функция интегрируема, то для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение T сегмента $[a, b]$: $S - s < \varepsilon$, где S и s – верхняя и нижняя суммы разбиения T . Но $S = S_d$ и $s = S_i$, где S_d и S_i – площади ступенчатых фигур, 1-я из которых содержит КТ, 2-я содержится в КТ $\Rightarrow S_d - S_i < \varepsilon \Rightarrow$ по Т1 КТ **квадрируема**. Т.к. $\lim$ при $\Delta \rightarrow 0$

($\Delta = \max \Delta t_i$) верхних и нижних сумм равен $\int_a^b f(x) dx$ и $s \leq P \leq S$, то площадь КТ можно найти по (1).

Пусть кривая L задана в полярной системе координат $r = r(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, и функция $r(\theta)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta]$.

Плоская фигура, ограниченная кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β , называется **криволинейным сектором** (КС).

Криволинейный сектор – **квадрируемая фигура**, его *площадь*

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta \quad (2)$$

Док-во. Рассмотрим разбиение T сегмента $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta$ и для каждого $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ построим круговые секторы, радиусы которых равны минимальному r_i и максимальному R_i значениям $r(\theta)$ на $[\theta_{i-1}, \theta_i] \Rightarrow$ получим две веерообразные фигуры, 1-я из которых содержится в КС, а 1-я содержит КС. Их площади

$$\overline{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta \theta_i, \quad \underline{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n R_i^2 \Delta \theta_i$$

1-я сумма – нижняя сумма s для функции $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ для разбиения T сегмента $[\alpha, \beta]$, 2-я сумма – верхняя сумма S . Т.к. ф-я $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$, то разность $S - s = \overline{S}_i - \underline{S}_i$ может быть как угодно малой $\Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0$ эта разность может быть $S - s = \overline{S}_i - \underline{S}_i < \varepsilon/2$. Впишем во внутреннюю веерообразную фигуру многоугольник Q_i с площадью S_i , для которого $\overline{S}_i - S_i < \varepsilon/4$, и опишем вокруг внешней веерообразной фигуры многоугольник Q_d с площадью S_d , для которого $S_d - \overline{S}_i < \varepsilon/4$. 1-й – вписан в КС, 2-й – описан КС. Т.к.

$$S_i < \overline{S}_i \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta < \overline{S}_i < S_d \quad (3)$$

то $S_d - S_i < \varepsilon \Rightarrow$ т.к. ε произвольно, КС **квадрируем**. Из (3) $\Rightarrow$ (2)

11. Понятие кубиреуемости (объем тела). Кубиреуемость некоторых классов тел.

Пусть E – некоторое конечное тело (тело – часть пространства, ограниченная замкнутой непересекающейся поверхностью). Пусть $\{V_i\}$ – мн-во объемов вписанных в E многогранников, а $\{V_d\}$ – мн-во объемов описанных E многогранников. $\{V_i\}$ ограничено сверху (объемом $\forall$ описанного многогранника), $\{V_d\}$ ограничено снизу (например, 0).

Пусть $\underline{V}$ – ТВГ $\{V_i\}$, $\overline{V}$ – ТНГ $\{V_d\}$. Числа $\underline{V}$ и $\overline{V}$ называются *нижним* и *верхним* объемом тела E .

$\underline{V} \leq \overline{V}$. Пусть $\underline{V} \geq \overline{V} \Rightarrow$ полагая $\frac{V - \overline{V}}{2} = \varepsilon > 0$ и учитывая определение точных граней, $\exists$ вписанный в E многогранник, объем V_i которого будет больше числа $\underline{V} - \varepsilon = \frac{V + \overline{V}}{2}$, т. е. $\frac{V + \overline{V}}{2} < V_i$, и такой описанный вокруг E многогранник, объем V_d которого меньше числа $\overline{V} + \varepsilon = \frac{V + \overline{V}}{2}$, т. е. $V_d < \frac{V + \overline{V}}{2} \Rightarrow V_d < V_i$ – противоречие, т.к. объем любого описанного многогранника не меньше объема любого вписанного.

О. Тело E называется **кубиреуемым**, если верхний объем $\overline{V}$ этого тела совпадает с нижним объемом $\underline{V}$. Число $V = \overline{V} = \underline{V}$ называется **объемом тела E** .

Т1. Чтобы тело E было кубиреуемым, необходимо и достаточно, чтобы для тела E для $\forall \varepsilon < 0 \exists$ описанный и вписанный многогранники, разность объемов которых $V_d - V_i < \varepsilon$.

Док-во. 1) Необходимость. Пусть тело E кубиреуемо, т. е. $V = \overline{V} = \underline{V}$. Т.к. $\underline{V}$ и $\overline{V}$ – ТВГ и ТНГ $\{V_i\}$ и $\{V_d\}$, то для $\forall \varepsilon > 0$

$\exists$ вписанный в E многогранник, объем V_i которого: $V - V_i < \varepsilon/2$; и $\exists$ описанный многогранник, объем V_d которого: $V_d - V < \varepsilon/2$.

Складывая, получим $V_d - V_i < \varepsilon$.

2) Дост-сть. Пусть V_d и V_i – объемы многогранников, для которых $V_d - V_i < \varepsilon$. Т.к. $V_i \leq \underline{V} \leq \overline{V} \leq V_d$, то $V - \underline{V} < \varepsilon$. Т.к. ε произвольно $\Rightarrow \underline{V} = \overline{V} \Rightarrow$ тело кубиреуемо.

Цилиндр – это тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными некоторой оси, и двумя плоскостями, перпендикулярными этой оси. Эти плоскости в пересечении с цилиндрической поверхностью образуют плоские фигуры, называемые *основаниями* цилиндра, а расстояние h между основаниями цилиндра называется *высотой* цилиндра.

У1. Если основанием цилиндра E является квадриреуемая фигура Q , то цилиндр является кубиреуемым телом, и его объем: $V = Ph$, где P – площадь основания Q , h – высота цилиндра.

Док-во. Так как Q квадриреуема, то для $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такие описанный и вписанный в эту фигуру многоугольники, разность их площадей $S_d - S_i < \varepsilon/h$. Объемы V_d и V_i призм с высотой h , основаниями которых служат эти многоугольники, равны $S_d h$ и $S_i h \Rightarrow V_d - V_i = (S_d - S_i)h < (\varepsilon/h)h = \varepsilon$. Т.к. эти призмы являются соответственно описанным и вписанным в E многогранниками, то по Т1 тело E кубиреуемо. Т.к. $V_i \leq Ph \leq V_d$, то объем цилиндра $V = Ph$. Из У1 $\Rightarrow$ **кубиреуемость ступенчатых тел (ступенчатым телом** называется объединение конечного числа цилиндров, расположенных так, что верхнее основание каждого предыдущего цилиндра находится в одной плоскости с нижним основанием следующего).

Замечание. Если для $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое описанное вокруг тела E ступенчатое тело и такое вписанное в E ступенчатое тело, разность объемов которых $V_d - V_i < \varepsilon$, то тело E кубиреуемо.

Криволинейной трапецией (КТ) называется фигура, ограниченная графиком заданной на сегменте $[a, b]$ непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$, ординатами, проведенными в точках a и b , и отрезком оси Ox между точками a и b .

Утверждение 2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда тело E , образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, кубиреуемо и его объем

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (1)$$

Док-во. Пусть T – разбиение $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, M_i и m_i – ТВГ и ТНГ $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$. На каждом $[x_{i-1}, x_i]$ построим два прямоугольника с высотами m_i и M_i . Получим две ступенчатые фигуры, 1-я содержится в КТ, 2-я содержит ее. При вращении КТ и этих ступенчатых фигур мы получим тело E и два ступенчатых тела, одно из которых содержится в E , а другое содержит E . Объемы этих ступенчатых тел:

$$V_d = \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta x_i \quad \text{и} \quad V_i = \pi \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta x_i$$

Эти выражения являются верхней и нижней суммами для функции $\pi f^2(x)$. Т.к. эта функция интегрируема, то разность этих сумм для некоторого T сегмента $[a, b]$ будет меньше данного $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ тело E кубиреуемо. Т.к. предел указанных сумм равен $\pi \int_a^b f^2(x) dx$, то объем тела E можно найти по (1).

12. Абсолютная сходимость несобственных интегралов. Формулы замены переменного и интегрирования по частям для несобственных интегралов.

Пусть $f(x)$ определена на $a \leq x < +\infty$ и для $\forall A (A \geq a)$ $\exists$ определенный интеграл Римана

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx \quad (1)$$

01. Предел $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ (2)

в случае, если он $\exists$, называется **несобственным интегралом 1-го рода** от $f(x)$ по полупрямой $[a, +\infty)$ и обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (3)$$

При этом говорят, что НСИ (3) сходится:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Если предела (2) $\nexists$, то НСИ (3) расходится.

НСИ по $-\infty < x \leq b$ и по всей прямой:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A' \rightarrow -\infty \\ A'' \rightarrow +\infty}} \int_{A'}^{A''} f(x) dx$$

при независимом друг от друга стремлении $A' \rightarrow -\infty$ и $A'' \rightarrow +\infty$. Из этих определений $\Rightarrow$

1) если для некоторого a сходится каждый из НСИ $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то сходится и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, причем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

2) если сходится НСИ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $b - \forall$ число, $b > a$, то сходится $\int_b^{+\infty} f(x) dx$, причем

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

Для существования предельного значения функции $F(A)$ при $A \rightarrow +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши: для $\forall \varepsilon > 0 \exists B > a$, для $\forall A_1$ и $A_2: A_1 > B, A_2 > B$, выполняется

$$|F(A_2) - F(A_1)| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ справедливо У1.

У1 (критерий Коши сходимости НСИ). Для сходимости НСИ

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists B > a$, для $\forall A_1$ и $A_2: A_1 > B, A_2 > B: \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$

Пусть $f(x)$ задана на $a \leq x < +\infty$ и для $\forall A \geq a \exists$ интеграл $\int_a^A f(x) dx$

У2 (общий признак сравнения). Пусть на полупрямой $a \leq x < +\infty$ $|f(x)| \leq g(x)$. Тогда из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ вытекает сходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

Док-во. Пусть $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится $\Rightarrow$ по к-рию Коши, для

$\forall \varepsilon > 0 \exists B > a$, что для $\forall A_1 > B$ и $A_2 > B: \left| \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx \right| < \varepsilon$ (3)

Согласно неравенствам для интегралов и $|f(x)| \leq g(x)$:

$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx \Rightarrow$ и из (3) $\Rightarrow$ для $\forall A_1 > B$ и $A_2 > B: \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится.

У3 (частный признак сравнения). Пусть $f(x)$ на $0 < a \leq x < +\infty$ удовлетворяет соотношению $|f(x)| \leq c/x^\lambda$, c и λ – постоянные, $\lambda > 1$. Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Если $\exists$ такая постоянная $c > 0$, что на $0 < a \leq x < +\infty$ справедливо $f(x) \geq c/x^\lambda$, в котором $\lambda \leq 1$, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится.

Док-во $\Rightarrow$ из У2 и следующего примера (положить $g(x) = c/x^\lambda$).

Пример. Рассмотрим НСИ $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ где $a > 0$ и $\lambda - \forall$ вещественные числа. $f(x) = 1/x^\lambda$ при $\forall A > 0$ интегрируема на $[a, A]$, причем $F(A) = \int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_a^A = \frac{A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}}{1-\lambda}$, при $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ при $\lambda > 1 \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}$, а при $\lambda \leq 1$ предел $\nexists \Rightarrow$ при $\lambda > 1$ сходится НСИ $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}$, а при $\lambda \leq 1$ он расходится.

Следствие (частный признак сравнения в предельной форме). 1) Если при $\lambda > 1 \exists$ конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|x^\lambda = c$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится. 2) Если же при $\lambda \leq 1 \exists$ предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|x^\lambda = c > 0$, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится.

Док-во. 1) Из существования предела при $x \rightarrow +\infty \Rightarrow$ ограниченность $|f(x)|x^\lambda \Rightarrow c$ некоторой постоянной $c_0 > 0$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq c_0/x^\lambda \Rightarrow$ применяется 1-я часть У3.

2) $c > 0 \Rightarrow \exists$ столь малое $\varepsilon > 0$, что $c - \varepsilon > 0$. Этому ε отвечает такое $B > 0$, что при $x \geq B$ выполняется $c - \varepsilon < f(x)x^\lambda$ (это $\Rightarrow$ из определения предела) $\Rightarrow f(x) > (c - \varepsilon) / x^\lambda \Rightarrow$ действует 2-я часть У3.

Пусть $f(x)$ интегрируема по $\forall [a, A]$ ($\Rightarrow |f(x)|$ тоже).

02. НСИ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$.

02. НСИ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится.

Замечание. Положив в У2 $g(x) = |f(x)| \Rightarrow$ из абсолютной сходимости НСИ вытекает его сходимость.

У4. Пусть выполнены условия:

1) $f(x)$ непрерывна на $a \leq x < +\infty$;

2) полуось $a \leq x < +\infty$ является мн-вом значений некоторой строго монотонной функции $x = g(t)$, заданной на $a \leq t < +\infty$ (или $-\infty < t \leq a$) и имеющей на этой полуоси непрерывн. производную;

3) $g(a) = a$.

Тогда из сходимости одного из следующих НСИ

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} f(g(t)) g'(t) dt \quad \left(- \int_{-\infty}^a f(g(t)) g'(t) dt \right)$$

вытекает сходимость другого и равенство этих интегралов.

Док-во. $\forall$ сегменту $[a, A]$ отвечает, из-за строгой монотонности функции $g(t)$, сегмент $[a, \rho]$ (или $[\rho, a]$) оси t такой, что при изменении на $[a, \rho]$ значения $x = g(t)$ заполняют сегмент $[a, A]$, причем $g(\rho) = A \Rightarrow$ выполнены все условия, при которых действует формула замены переменной под знаком определенного интеграла $\Rightarrow \int_a^A f(x) dx = \int_a^\rho f(g(t)) g'(t) dt$ (4)

В силу строгой монотонности функции $x = g(t)$, $A \rightarrow +\infty$ при $\rho \rightarrow +\infty$ и, обратно $\rho \rightarrow +\infty$ при $A \rightarrow +\infty$ (или $A \rightarrow +\infty$ при $\rho \rightarrow -\infty$ и $\rho \rightarrow -\infty$ при $A \rightarrow +\infty$) $\Rightarrow$ из (4) $\Rightarrow$ справедливость У4.

У5. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на $a \leq x < +\infty$ и $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = L$. Тогда из сходимости одного из интегралов $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} u'(x)v(x) dx$ (5)

вытекает сходимость другого и справедливость формулы

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x) dx = L - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x) dx \quad (6)$$

Док-во. На $\forall$ сегменте $[a, A]$ действует обычная формула интегрирования по частям $\Rightarrow$

$$\int_a^A u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^A - \int_a^A u'(x)v(x) dx$$

Т.к. при $A \rightarrow +\infty$ выражение $[u(x)v(x)] \Big|_a^A \rightarrow L - u(a)v(a)$, то из последнего равенства следует одновременная сходимость или расходимость интегралов (5) и справедливость (6) в случае сходимости одного из интегралов (5).

13. Признак Абеля–Дирихле. Главное значение несобственного интеграла.

Пусть $f(x)$ определена на $a \leq x < +\infty$ и для $\forall A (A \geq a) \exists$ определенный интеграл Римана

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx \quad (1)$$

01. Предел $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ (2)

в случае, если он $\exists$, называется **несобственным интегралом 1-го рода** от $f(x)$ по полупрямой $[a, +\infty)$ и обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (3)$$

При этом говорят, что НСИ (3) сходится:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Если предела (2) $\nexists$, то НСИ (3) расходится.

НСИ по $-\infty < x \leq b$ и по всей прямой:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A' \rightarrow -\infty \\ A'' \rightarrow +\infty}} \int_{A'}^{A''} f(x) dx$$

при независимом друг от друга стремлении $A' \rightarrow -\infty$ и $A'' \rightarrow +\infty$. Из этих определений $\Rightarrow$

1) если для некоторого a сходится каждый из НСИ $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то сходится и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, причем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

2) если сходится НСИ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $b - \forall$ число, $b > a$, то сходится $\int_b^{+\infty} f(x) dx$, причем

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

Для существования предельного значения функции $F(A)$ при $A \rightarrow +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши: для $\forall \varepsilon > 0 \exists B > a$, для $\forall A_1$ и $A_2: A_1 > B, A_2 > B$ выполняется

$$|F(A_2) - F(A_1)| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ справедливо У1.

У1(критерий Коши сходимости НСИ). Для сходимости НСИ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists B > a$, для

$$\forall A_1 \text{ и } A_2, : A_1 > B, A_2 > B: \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Пусть $f(x)$ задана на полупрямой $a \leq x < +\infty$ и для $\forall A \geq a \exists$ обычный интеграл $\int_a^A f(x) dx$

Пусть $f(x)$ интегрируема по $\forall [a, A] (\Rightarrow |f(x)|$ тоже).

02. НСИ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$.

02. НСИ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится.

У2 (признак Дирихле – Абеля). Пусть выполнены условия:

1) $f(x)$ непрерывна на $a \leq x < +\infty$ и имеет на этой полупрямой

ограниченную первообразную $F(x)$ ($F(x) = \int_a^x f(t) dt$ для всех $x \geq a$: $|F(x)| \leq K = \text{const}$);

2) $g(x)$ определена и монотонно **не** возрастает на $a \leq x < +\infty$ и имеет равный 0 предел при $x \rightarrow +\infty$;

3) производная $g'(x)$ $\exists$ и непрерывна в $\forall$ точке $a \leq x < +\infty$.

Тогда сходится НСИ $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ (4)

Док-во. Пусть $[A_1, A_2]$ – $\forall$ сегмент полупрямой $a \leq x < +\infty$, $A_2 > A_1$. Проведем на нем интегрирование по частям

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx = F(x) g(x) \Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x) g'(x) dx$$

$|F(x)| \leq K$ и $g(x)$ не возрастает и $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$

(т.е. $g(x) \geq 0$, $g'(x) \leq 0$) $\Rightarrow$

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx \right| \leq K[g(A_1) + g(A_2)] + K \int_{A_1}^{A_2} (-g'(x)) dx$$

$$\int_{A_1}^{A_2} (-g'(x)) dx = g(A_1) - g(A_2) \Rightarrow$$

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx \right| \leq 2Kg(A_1) \quad (5)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то по данному ε можно выбрать B так, что при $A_1 \geq B$ выполняется неравенство $g(A_1) < \varepsilon/(2K)$ $\Rightarrow$ из неравенства (5) $\Rightarrow$ для $\forall A_1 > B$ и $A_2 > B$ выполняется

$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) g(x) dx \right| < \varepsilon \Rightarrow$ по критерию Коши (4) сходится.

04. Пусть $f(x)$ определена на прямой $-\infty < x < +\infty$ и интегрируема на каждом сегменте, принадлежащем этой прямой. Функция $f(x)$

интегрируема по Коши, если $\exists \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$ (в симметричных пределах). Этот предел называется **главным значением**

несобственного интеграла от $f(x)$ (в смысле Коши):

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$$

У3. Пусть $f(x)$ интегрируема на каждом сегменте прямой $-\infty < x < +\infty$. Если $f(x)$ нечетна, то она интегрируема по Коши и главное значение интеграла от нее равняется 0. Если $f(x)$ четна, то она интегрируема по Коши $\Leftrightarrow$ сходится НСИ $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

1-я часть очевидна. Для док-ва 2-й части воспользоваться равенством $\int_{-A}^A f(x) dx = 2 \int_0^A f(x) dx$, справедливым для любой четной функции, и 01 сходимости НСИ.

14. Метод хорд и его обоснование.

Послед-сть $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ называется **итерационной**, если для $\forall n \geq 1$ x_n выражается через x_{n-1} по рекуррентной формуле $x_n = F(x_{n-1})$, $x_0 - \forall$ число из области задания $F(x)$.

У1. Пусть $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и пусть все элементы итерационной послед-ти $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ лежат на $[a, b]$. Тогда, если $\{x_n\} \rightarrow c$, то число c является корнем уравнения $x = F(x)$.

Док-во. $\{x_n\} \rightarrow c$ и все $x_n \in [a, b] \Rightarrow c \in [a, b]$. $F(x)$ непрерывна в $c \Rightarrow \{F(x_n)\} \rightarrow F(c) \Rightarrow$ равенство $x_n = F(x_{n-1})$ в пределе при $n \rightarrow \infty$ переходит в $c = F(c) \Rightarrow c$ – корень уравнения $x = F(x)$.

Метод хорд. Пусть искомым корнем c уравнения $f(x) = 0$ изолирован на

$[a, b]$, $x_0 \in [a, b] - 0$ -е приближение корня, обозначим $A_0 = f(x_0)$, $B = f(b)$. Проведем через точки A_0 и B хорду A_0B и возьмем за 1-е приближение абсциссу x_1 точки пересечения этой хорды с осью Ox . Далее проведем хорду через точки A_1 с абсциссой x_1 и B . За 2-е приближение возьмем абсциссу x_2 точки пересечения хорды A_2B с осью Ox . Продолжая этот процесс неограниченно, построим послед-сть $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ приближенных значений искомого корня. Уравнение хорды, проходящей через точки $A_n(x_n, f(x_n))$ и $B(b, f(b))$:

$$\frac{y - f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} = \frac{x - x_n}{b - x_n} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \quad (3)$$

абсцисса x_{n+1} точки пересечения этой хорды с осью Ox . (3) определяет алгоритм метода хорд.

Обоснование метода. Пусть искомым корнем c уравнения $f(x) = 0$ изолирован на $[a, b]$, на котором $f(x)$ имеет монотонную 1-ю производную, сохраняющую постоянный знак. $f'(x)$ непрерывна, ибо она не может иметь точек разрыва 1-го рода, а монотонная функция других точек разрыва не имеет. Пусть эта $f'(x) > 0$ и не убывает на $[a, b]$. Уравнение

$$x = F(x), \quad \text{где } F(x) = x - \frac{(b - x)f(x)}{f(b) - f(x)} \quad (4)$$

имеет на $[a, b]$ только 1 корень c , совпадающий с корнем ур-ния $f(x) = 0$ (при этом считаем, что $F(b) = b - f(b)/f'(b) \Rightarrow F(x)$ будет непрерывна на всем $[a, b] \Rightarrow$ вместо уравнения $f(x) = 0$ можно решать уравнение (4) $\Rightarrow$ взять $x_0 = a$ и построить итерационную послед-сть

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \quad (5)$$

Рекуррентная формула (5) $\equiv$ рекуррентной формуле (3).

Докажем, что $\{x_n\} \rightarrow c$. Если для некоторого номера n окажется, что $x_n = c$, где c – искомым корень, то $f(x_n) = f(c) = 0$ и из (5) $\Rightarrow x_{n+1} = c \Rightarrow$ аналогично $x_{n+2} = x_{n+3} = \dots = c$, т. е. $\{x_n\} \rightarrow c$.

Докажем, что если $a \leq x_n \leq c$, то $a \leq x_n \leq x_{n+1} \leq c$. Пусть $a \leq x_n \leq c$. Из (5), учитывая, что $f(c) = 0$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} = \frac{(b - x_n)[f(c) - f(x_n)]}{[f(b) - f(c)] + [f(c) - f(x_n)]} = \\ &= \text{(Применяя к выражениям в [] Т. Лагранжа)} \\ &= \frac{(b - x_n)f'(\xi_n)}{(b - c)f'(\xi_n) + (c - x_n)f'(\xi_n)}(c - x_n) \quad (6) \end{aligned}$$

где $x_n < \xi_n < c$, $c < \xi_n < b \Rightarrow \xi_n < \xi_n$. Т.к. $f'(x) > 0$ и не убывает $\Rightarrow 0 < f'(\xi_n) \leq f'(\xi_n^*) \Rightarrow$ дробь в правой части (6) > 0 и ≤ 1 , (т.к. $(b - c)f'(\xi_n^*) + (c - x_n)f'(\xi_n) \geq [(b - c) + (c - x_n)]f'(\xi_n) = (b - x_n)f'(\xi_n) \Rightarrow 0 \leq x_{n+1} - x_n \leq c - x_n \Rightarrow x_n \leq x_{n+1} \leq c \Rightarrow$ и из того, что $x_0 = a \Rightarrow$ все $x_n \in [a, c]$ (и тем более $\in [a, b]$) и послед-сть $\{x_n\}$ является неубывающей ($\Rightarrow$ и сходящейся). В силу У1 $\{x_n\} \rightarrow c$.

31. Еще 3 случая: 1) $f'(x) < 0$ и не возрастает на $[a, b]$ (все делать также), 2) $f'(x) > 0$ и не возрастает на $[a, b]$, 3) $f'(x) < 0$ и не убывает на $[a, b]$.

В случаях 2) и 3) уравнение $f(x) = 0$ заменяется уравнением

$$x = F(x), \quad \text{где } F(x) = x - \frac{(a - x)f(x)}{f(a) - f(x)}$$

и нулевое приближение точка $x_0 = b$ (при этом $\{x_n\}$ – невозрастающая).

32. Оценка отклонения n -го приближения x_n от точного значения корня c . Т. Лагранжа к $f(x_n) = f(x_n) - f(c) \Rightarrow f(x_n) = (x_n - c)f'(\xi_n) \Rightarrow$

$$|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad m = \min|f'(x)| \text{ на } [a, b]$$

15. Метод касательных и его обоснование.

Послед-сть $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ называется **итерационной**, если для $\forall n \geq 1$ x_n выражается через x_{n-1} по рекуррентной формуле $x_n = F(x_{n-1})$, $x_0 - \forall$ число из области задания $F(x)$.

У1. Пусть $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и пусть все элементы итерационной послед-ти $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ лежат на $[a, b]$. Тогда, если $\{x_n\} \rightarrow c$, то число c является корнем уравнения $x = F(x)$.

Док-во. $\{x_n\} \rightarrow c$ и все $x_n \in [a, b] \Rightarrow c \in [a, b]$. $F(x)$ непрерывна в $c \Rightarrow \{F(x_n)\} \rightarrow F(c) \Rightarrow$ равенство $x_n = F(x_{n-1})$ в пределе при $n \rightarrow \infty$ переходит в $c = F(c) \Rightarrow c -$ корень уравнения $x = F(x)$.

У2. Пусть $c -$ корень $x = F(x)$ и пусть в некотором $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ $|F'(x)| \leq \alpha < 1$. Тогда $\{x_n\} \rightarrow c$ ($x_0 - \forall$ число из $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$).

Док-во. $x_0 \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \Rightarrow$ пусть $x_{n-1} \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, надо доказать, что $x_n \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. По Т. Лагранжа и учитывая, что $F(c) = c, x_n = F(x_{n-1})$:

$$x_n - c = F(x_{n-1}) - F(c) = F'(\xi)(x_{n-1} - c) \quad (1)$$

где $x_{n-1} < \xi < c \Rightarrow \xi \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. $|F'(x)| \leq \alpha < 1 \Rightarrow$ из (1)

$|x_n - c| \leq \alpha |x_{n-1} - c|$ (2) $\Rightarrow |x_n - c| < |x_{n-1} - c| \Rightarrow \forall x_n$ расположен к c ближе, чем предыдущий $x_{n-1} \Rightarrow$ т.к. $x_{n-1} \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ и т.к. сегмент симметричен относительно c , то $x_n \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \Rightarrow$ все $\{x_n\} \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Докажем, что $\{x_n\} \rightarrow c$. (2) справедливо для $\forall n \Rightarrow |x_n - c| \leq \alpha^n |x_0 - c| \Rightarrow$ т.к. $\alpha^n \rightarrow 0$, то $x_n \rightarrow c$.

Метод касательных. Пусть искомый корень c уравнения $f(x) = 0$ изолирован на $[a, b]$. Пусть 0-е приближение искомого корня $x_0 \in [a, b]$ и $B_0 = f(x_0)$. Проведем через B_0 касательную к графику функции и возьмем за 1-е приближение абсциссу x_1 точки пересечения этой касательной с осью Ox . Далее проведем касательную через B_1 с абсциссой x_1 и возьмем за 2-е приближение абсциссу x_2 точки пересечения этой касательной с осью Ox . Продолжая, построим послед-сть $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ приближенных значений искомого корня. Возьмем уравнение $Y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ касательной в B_n и вычислим абсциссу x_{n+1} точки пересечения этой касательной с осью $Ox \Rightarrow$ получим формулу алгоритма метода касательных:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3)$$

Обоснование метода.

1°. Пусть корень c уравнения $f(x) = 0$ изолирован на $[a, b]$, где $f(x)$ имеет $f'(x) \neq 0$ и ограниченную $f^{(2)}(x)$. Докажем, что в этом случае $\exists$ такая малая окрестность корня c , что если 0-е приближение x_0 лежит в этой окрестности, то $\{x_n\} \rightarrow c$. Уравнение

$$x = F(x), \quad \text{где } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (4)$$

имеет на $[a, b]$ только 1 корень c , совпадающий с корнем уравнения $f(x) = 0 \Rightarrow$ вместо $f(x) = 0$ можно решать уравнение (4) $\Rightarrow$ взяв некоторое x_0 , построим итерационную послед-сть

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (5)$$

Рекуррентная формула (5) $\equiv$ рекуррентной формуле (4).

В силу требований, наложенных на $f(x)$, $\exists m > 0$ и $N > 0$: всюду на $[a, b]$ $|f'(x)| \geq m > 0$ и $|f''(x)| \leq N$. Т.к.

$$F'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \Rightarrow$$
$$|F'(x)| \leq \frac{|f(x)|N}{m^2} \quad (6)$$

Из непрерывности $f(x) \Rightarrow$ в некоторой ε -окрестности корня c

$$|f(x)| \leq \frac{m^2}{N} \alpha \quad (7)$$

где $\alpha -$ фиксированное число: $0 < \alpha < 1$. Из (6) и (7) $\Rightarrow$ всюду в ε -окрестности корня $|F'(x)| \leq \alpha < 1 \Rightarrow$ если взять x_0 из этой окрестности, то по У2 $\{x_n\} \rightarrow c$.

31. Оценка погрешности. Разложим $f(x)$ в окрестности x_n по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + 1/2 f''(\xi)(x - x_n)^2$. Полагая $x = c$ и учитывая $f(c) = 0: 0 = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + 1/2 f''(\xi)(c - x_n)^2$. Вычитая из последней формулы ф-лу $f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$, которая вытекает из (5), получим

$$x_{n+1} - c = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)} (x_n - c)^2 \Rightarrow |x_{n+1} - c| \leq \frac{N}{2m} |x_n - c|^2$$

Последовательно применяя эту оценку для $n = 0, 1, 2, \dots$ получим:

$$|x_{n+1} - c| \leq \left(\frac{N}{2m}\right)^n |x_n - c|^{2^n}$$

2°. Пусть корень c уравнения $f(x) = 0$ изолирован на $[a, b]$, где $f(x)$ имеет монотонную $f'(x)$, сохраняющую постоянный знак. $f'(x)$ обязательно непрерывна, ибо она не может иметь точек разрыва 1-го рода, а монотонная функция других точек разрыва не имеет. Пусть $f'(x) > 0$ и не убывает на $[a, b]$.

Докажем, что если $x_0 = b$, а x_{n+1} определяется через x_n с помощью формулы (5), то $\{x_n\} \rightarrow c$. Если для некоторого номера n окажется, что $x_n = c$, где $c -$ искомый корень, то $f(x_n) = f(c) = 0$ и из (5) $\Rightarrow x_{n+1} = c \Rightarrow$ аналогично $x_{n+2} = x_{n+3} = \dots = c$, т.е. $\{x_n\} \rightarrow c$.

Докажем, что если $c \leq x_n \leq b$, то $c \leq x_{n+1} \leq x_n \leq b$. Из (5) и $f(c) = 0$:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n) - f(c)}{f'(x_n)} = (\text{Т. Лагранжа}) = \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)} (x_n - c) \quad (8)$$

где $c < \xi_n < x_n$. Т.к. $f'(x) > 0$ и не убывает $\Rightarrow 0 < \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)} \leq 1 \Rightarrow$

$0 \leq x_n - x_{n+1} \leq x_n - c \Rightarrow c \leq x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow$ из $x_0 = b \Rightarrow$

$x_n \in [c, b]$ (и тем более $\in [a, b]$) и $\{x_n\}$ является невозрастающей (и сходящейся). По У1 $\{x_n\} \rightarrow c$.

32. Еще 3 случая: 1) $f'(x) < 0$ и не возрастает на $[a, b]$ (все также), 2) $f'(x) > 0$ и не возрастает на $[a, b]$, 3) $f'(x) < 0$ и не убывает на $[a, b]$.

В 1) $x_0 = b$, а в 2) и 3) $x_0 = a$. Это обеспечит $\{x_n\} \in [a, b]$ и $\{x_n\} \rightarrow c$.

33. Оценка отклонения n -го приближения от точного значения корня c . Т. Лагранжа к $f(x_n) = f(x_n) - f(c) \Rightarrow f(x_n) = (x_n - c) f'(\xi_n) \Rightarrow$

$$|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad m = \min |f'(x)| \text{ на } [a, b]$$

16. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx$. (1)

Метод трапеций. Разобьем $[a, b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Метод трапеций: замена интеграла (1) суммой

$$\frac{b-a}{2n} [(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))] = \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right)$$

площадей трапеций с основаниями, равными $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$, и с высотами, равными $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n \Rightarrow$ **формула трапеций**

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right) + R \quad (3)$$

Докажем: если $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную $f^{(2)}(x)$, то $\exists \eta \in [a, b]$:

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f^{(2)}(\eta) \quad (4)$$

Оценим интеграл $\int_{-h}^{+h} f(x) dx$, считая, что $f(x)$ имеет на $[-h, +h]$ непрерывную 2-ю производную.

Подвергая следующий интеграл двукратному интегрированию по частям, получим

$$\int_{-h}^{+h} f^{(2)}(x^2 - h^2) dx = [f'(x)(x^2 - h^2)]|_{-h}^{+h} - 2 \int_{-h}^{+h} f'(x) dx =$$

$$= -[2f(x)x]|_{-h}^{+h} + 2 \int_{-h}^{+h} f(x) dx =$$

$$= -2[f(-h) + f(+h)]h + 2 \int_{-h}^{+h} f(x) dx \Rightarrow$$

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \frac{f(-h) + f(h)}{2} 2h + \bar{R} \quad (5)$$

$$\text{где } \bar{R} = -\frac{1}{12} f^{(2)}(\eta) (2h)^3 \quad (-h \leq \eta \leq h) \quad (6)$$

Т.к. величина $\frac{f(-h)+f(h)}{2} 2h$ представляет собой площадь трапеции, то (5) и (6) доказывают, что ошибка, совершаемая при замене $\int_{-h}^h f(x) dx$ этой площадью, имеет порядок h^3 .

Для вычисления интеграла (1) представим этот интеграл в виде суммы достаточно большого числа n интегралов

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

Применяя к каждому из этих интегралов формулы (5) и (6), получим (3) с остаточным членом (4).

Метод прямоугольников. Разобьем $[a, b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Пусть x_{2k-1} – средняя точка $[x_{2k-2}, x_{2k}]$. Метод прямоугольников: замена интеграла (1) суммой

$$\frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})]$$

площадей прям-ков с высотами, $= f(x_{2k-1})$, и основаниями, равными $x_{2k} - x_{2k-2} = (b-a)/n \Rightarrow$ **формула прямоугольников**

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})] + R \quad (2)$$

Если $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную 2-ю производную, то $\exists \eta \in [a, b]$:

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f^{(2)}(\eta)$$

Ошибка метода прямоугольников имеет порядок h^3 .

Метод парабол. Разобьем $[a, b]$ на n равных частей при помощи точек $a = x_0 < x_2 < \dots < x_{2n} = b$ и x_{2k-1} – середина $[x_{2k-2}, x_{2k}]$. Метод парабол заключается в замене интеграла (1) суммой площадей фигур, представляющих собой криволинейные трапеции, лежащие под параболлами, проходящими через 3 точки графика функции $f(x)$ с абсциссами $x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}$:

$$\frac{b-a}{6n} \{ [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \dots + [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_n)] \} =$$

$$= \frac{b-a}{6n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) \right\}$$

$\Rightarrow$ справедлива **формула парабол** или **формула Симпсона**:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) \right\} + R$$

Если $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную 4-ю производную, то $\exists \eta \in [a, b]$:

$$R = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta)$$

Ошибка метода парабол имеет порядок h^5 .

17. Различные множества точек и последовательности точек n -мерного пространства. Теорема Больцано–Вейерштрасса.

M_n – во всех упорядоченных совокупностей $(x_1, \dots, x_m)$ m чисел $x_1, \dots, x_m$ называется **m -мерным координатным пространством A^m** . Координатное m -во A^m называется **m -мерным евклидовым m -вом E^m** , если между $\forall$ 2-мя точками M' $(x'_1, \dots, x'_m)$ и M'' $(x''_1, \dots, x''_m)$ m -ва A^m определено расстояние :

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + \dots + (x'_m - x''_m)^2} \quad (1)$$

1°. $\{M\}$: $\rho(M, M_0) \leq R^2$ – **m -мерный шар** радиуса R с центром в M_0 . Если $\rho(M, M_0) < R^2$, то $\{M\}$ – **открытый m -мерный шар**.

2°. $\{M\}$: $\rho(M, M_0) = R^2$ – **m -мерная сфера** радиуса R с центром в точке M_0 .

3°. M_n – во $\{M\}$: $|x_1 - x_1^0| \leq d_1, \dots, |x_m - x_m^0| \leq d_m$ – **m -мерный координатный параллелепипед**. $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ – его центр. Если неравенства строгие, то $\{M\}$ – **открытый параллелепипед**. **ε -окрестность точки M_0** m -мерного евклидова m -ва E^m – **открытый m -мерный шар** радиуса ε с центром в M_0 . **Прямоугольная окрестность M_0** – $\forall$ открытый m -мерный координатный параллелепипед с центром в M_0 .

U ε -окрестность M_0 евклидова m -мерного m -ва E^m содержит некоторую прямоугольную окрестность этой точки. $\forall$ прямоугольная окрестность M_0 содержит некоторую ε -окрестность M_0 .

M – **внутренняя точка** $\{M\}$, если $\exists$ некоторая ε -окрестность M , все точки которой $\in \{M\}$. Точка M – **граничная точка** $\{M\}$, если $\forall \varepsilon$ -окрестность M содержит точки, $\in \{M\}$ и $\notin \{M\}$. M_n – во $\{M\}$ m -ва E^m называется **открытым множеством или областью**, если $\forall$ точка этого m -ва внутренняя. Если $\forall$ граничная точка $\{M\}$ является точкой этого m -ва, то $\{M\}$ – **замкнутое**. Если $\{M\}$ – область, то $\{\bar{M}\}$, полученное присоединением к $\{M\}$ всех его граничных точек, – **замкнутая область**. Если все точки области $\{M\}$ находятся внутри некоторого шара, то $\{M\}$ – **ограниченная**.

Непрерывной кривой L в m -ва E^m называется m -во $\{M\}$ точек m -ва, координаты $x_1, \dots, x_m$ которых являются непрерывными функциями параметра t : $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \leq t \leq \beta$ (2) Точки M' $(x'_1, \dots, x'_m)$ и M'' $(x''_1, \dots, x''_m)$ m -ва E^m можно соединить непрерывной кривой L , если $\exists$ такая непрерывная кривая L , определяемая (2) и

$$x'_1 = \varphi_1(\alpha), \dots, x'_m = \varphi_m(\alpha) \quad x''_1 = \varphi_1(\beta), \dots, x''_m = \varphi_m(\beta)$$

M_n – во $\{M\}$ m -ва E^m называется **связным**, если $\forall$ его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой $\in \{M\}$.

Окрестностью M называется $\forall$ открытое связное множество, содержащее M .

Последовательность $\{M_n\}$ точек E^m называется сходящейся, если $\exists$ такая точка A , что для $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$: при $n \geq N$ выполняется $\rho(M_n, A) < \varepsilon$. A – **предел последовательности $\{M_n\}$** .

Л1. Пусть послед-сть $\{M_n\}$ точек E^m : $\{M_n\} \rightarrow A$. Тогда послед-сти координат точек M_n : $\{x_1^{(n)}\} \rightarrow a_1, \dots, \{x_m^{(n)}\} \rightarrow a_m$, где $a_1, \dots, a_m$ – координаты A , и наоборот, если послед-сти координат точек M_n : $\{x_1^{(n)}\} \rightarrow a_1, \dots, \{x_m^{(n)}\} \rightarrow a_m$, то послед-сть $\{M_n\} \rightarrow A$ с координатами $a_1, \dots, a_m$.

Док-во. 1. Если $\{M_n\} \rightarrow A$, то для $\forall \varepsilon > 0 \exists N$: при $n \geq N$ выполняется $\rho(M_n, A) < \varepsilon$. Пусть $(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ – координаты M_n , а $(a_1, \dots, a_m)$ – координаты $A \Rightarrow \rho(M_n, A) < \varepsilon$ можно записать:

$$\sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (x_m^{(n)} - a_m)^2} < \varepsilon \quad (3)$$

$$\Rightarrow \text{при } n \geq N \quad |x_1^{(n)} - a_1| < \varepsilon, \dots, |x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\{x_1^{(n)}\} \rightarrow a_1, \dots, \{x_m^{(n)}\} \rightarrow a_m$$

2. Пусть $\{x_1^{(n)}\} \rightarrow a_1, \dots, \{x_m^{(n)}\} \rightarrow a_m \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1, \dots, N_m$: при $n_1 \geq N_1, \dots, n_m \geq N_m$ выполняются

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \dots, |x_m^{(n)} - a_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

$\Rightarrow$ при $n \geq N = \max \{N_1, \dots, N_m\}$ выполняется (3) $\Rightarrow$ при $n \geq N$ выполняется $\rho(M_n, A) < \varepsilon$, где A – точка E^m с координатами $a_1, \dots, a_m \Rightarrow \{M_n\} \rightarrow A$.

Послед-сть $\{M_n\}$ точек E^m называется фундаментальной или последовательностью Коши, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists N$: при $n \geq N$ и для $\forall p \in \mathbb{N}$ выполняется $\rho(M_{n+p}, M_n) < \varepsilon$.

Критерий Коши. Чтобы послед-сть $\{M_n\}$ точек E^m была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Из фундаментальности $\{M_n\} \Leftrightarrow \{x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\}$ также фундаментальны. Затем применить критерий Коши для числовых послед-стей к послед-стям координат точек $\{M_n\}$ и лемму 1.

Послед-сть $\{M_n\}$ точек E^m называется ограниченной, если $\exists a > 0$: для $\forall n$ выполняется $\rho(O, M_n) \leq a$, где O – точка с координатами $(0, \dots, 0)$.

Т Больцано–Вейерштрасса. Из $\forall$ ограниченной послед-сти $\{M_n\}$ точек E^m можно выделить сходящуюся подпоследовательность **Док-во.** $\{M_n\}$ ограничена $\Rightarrow$ для $\forall n$ выполняется $\rho(O, M_n) \leq a$.

$\rho(O, M_n) = \sqrt{x_1^{(n)2} + \dots + x_m^{(n)2}} \Rightarrow \forall n \quad |x_1^{(n)}| \leq a, \dots, |x_m^{(n)}| \leq a \Rightarrow \{x_1^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ координат точек M_n ограничены. По теореме Больцано – Вейерштрасса для числовых послед-стей из $\{x_1^{(n)}\}$ можно выделить $\{x_1^{(n_{k_1})}\} \rightarrow a_1$. Из соответствующей подпослед-сти $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ послед-сти 2-х координат точек M_n можно выделить подпослед-сть $\{x_2^{(n_{k_2})}\} \rightarrow a_2$. При этом подпослед-сть $\{x_1^{(n_{k_2})}\}$ последовательности $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$ сходит к числу $a_1 \Rightarrow \{x_1^{(n_{k_2})}\} \rightarrow a_1, \{x_2^{(n_{k_2})}\} \rightarrow a_2$. Продолжая, получим подпослед-сть $\{x_m^{(n_{k_m})}\} \rightarrow a_m$ послед-сти m -х координат точек M_n , причем $\{x_1^{(n_{k_m})}\} \rightarrow a_1$,

$$\dots, \{x_m^{(n_{k_m})}\} \rightarrow a_m \Rightarrow \text{по Л1, подпослед-сть } \{M_{n_{k_m}}\} \rightarrow A(a_1, \dots, a_m) \bullet$$

3. Если $\{M_n\} \subset \{M\}$, где $\{M\}$ – замкнутое m -во, и $\{M_n\} \rightarrow A$, то $A \in \{M\}$, т.к. в $\forall \varepsilon$ -окрестности точки A есть точки $M_n \in \{M\} \Rightarrow$ точка A – либо внутренняя, либо граничная точка $\{M\} \Rightarrow A \in \{M\}$.

18. Понятие функции и переменных и ее предельного значения.

Мн-во всевозможных упорядоченных совокупностей $(x_1, \dots, x_m)$ т чисел $x_1, \dots, x_m$ называется **т-мерным координатным пр-вом** A^m . Координатное пр-во A^m называется **т-мерным евклидовым пр-вом** E^m , если между $\forall$ двумя точками $M'(x'_1, \dots, x'_m)$ и $M''(x''_1, \dots, x''_m)$ координатного пр-ва A^m определено расстояние :

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + \dots + (x'_m - x''_m)^2}$$

Если каждой точке M из $\{M\}$ точек E^m ставится в соответствие по известному закону некоторое число u , то говорят, что на *мн-ве* $\{M\}$ задана функция $u = u(M)$ или $u = f(M)$. $\{M\}$ – **область задания функции** $u = f(M)$. Число u , соответствующее данной M из $\{M\}$ – **частное значение функции в M** . Совокупность $\{u\}$ всех частных значений $u = f(M)$ – **множество значений** этой функции.

О1. Число b называется **предельным значением** функции $u = f(M)$ в точке A (**пределом функции** при $M \rightarrow A$), если для $\forall$ сходящейся к A последовательности $M_1, M_2, \dots, M_n \dots$ точек *мн-ва* $\{M\}$, элементы M_n которой отличны от A ($M_n \neq A$), соответствующая послед-сть $f(M_1), \dots, f(M_n), \dots$ значений функции сходится к b .

О2. Число b называется **предельным значением** функции $u = f(M)$ в точке A , если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$: для всех точек M из области задания функции, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, A) < \delta$, выполняется $|f(M) - b| < \varepsilon$.

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = b \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, \dots, x_m) = b$$

З. О1 и О2 эквивалентны.

Док-во. 1. Пусть b – предел по О1, но **не** предел по О2 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: для сколь угодно малого $\delta \exists M$ из области задания $f(M)$:

$$0 < \rho(M, A) < \delta, \text{ но } |f(M) - b| \geq \varepsilon \Rightarrow \text{для } \forall \delta_n = 1/n$$

$$\exists M_n : 0 < \rho(M_n, A) < \delta, \text{ но } |f(M_n) - b| \geq \varepsilon.$$

Из $0 < \rho(M_n, A) < \delta \Rightarrow \{M_n\} \rightarrow A \Rightarrow$ по О1 $\{f(M_n)\} \rightarrow b \Rightarrow$ противоречит $|f(M_n) - b| \geq \varepsilon$

2. Пусть b – предел по О2 и $\{M_n\} \rightarrow A$. Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$, по О2

$\exists \delta > 0$: $\forall M$ из области задания $f(M)$: $0 < \rho(M, A) < \delta$ выполня-ется $|f(M) - b| < \varepsilon$. Т.к. $\{M_n\} \rightarrow A$, то для этого δ найдется N :

$$0 < \rho(M_n, A) < \delta \text{ при } n \geq N \Rightarrow |f(M_n) - b| < \varepsilon \text{ при } n \geq N \Rightarrow \{f(M_n)\} \rightarrow b.$$

О3. Число b называется **предельным значением** функции $u = f(M)$ при $M \rightarrow \infty$, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists a > 0$: для всех M из области задания функции, удовлетворяющих условию $\rho(O, M) > a$, выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

У. Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют в A пределы b и c . Тогда функции $f(M) + g(M), f(M) - g(M), f(M) \cdot g(M), f(M) / g(M)$ имеют в A пределы (частное при $c \neq 0$), равные соответственно $b + c, b - c, b \cdot c, b/c$.

Для док-ва взять $\forall \{M_n\} \rightarrow A$, по условию $\{f(M_n)\} \rightarrow b$,

$\{g(M_n)\} \rightarrow c \Rightarrow$ по св-вам сходящихся послед-стей:

$$\{f(M_n) \pm g(M_n)\} \rightarrow b \pm c, \{f(M_n) \cdot g(M_n)\} \rightarrow b \cdot c,$$

$$\{f(M_n) / g(M_n)\} \rightarrow b / c. \text{ В силу произвольности } \{M_n\}:$$

$$\lim_{M \rightarrow A} (f(M) + g(M)) = b + c \text{ и др. утверждения.}$$

Функция $u = f(M)$ называется **бесконечно малой в точке A** (при $M \rightarrow A$), если $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = 0$

Функция $f(M) = (x_1 - a_1)^{n_1} + \dots + (x_m - a_m)^{n_m}$, где $n_i > 0, \dots, n_m > 0$, является бесконечно малой в $A(a_1, \dots, a_m)$, т.к. каждая $f(x_k) = (x_k - a_k)^{n_k}$ является бесконечно малой в $x_k = a_k$.

Если $u = f(M)$ имеет предельное значение b в точке A , то функция $\alpha(M) = f(M) - b$ является бесконечно малой в точке A , т.к.

$$\lim_{M \rightarrow A} \alpha(M) = \lim_{M \rightarrow A} (f(M) - b) = \lim_{M \rightarrow A} f(M) - \lim_{M \rightarrow A} b = 0$$

Специальное представление для функции, имеющей равное b предельное значение в точке A :

$$f(M) = b - \alpha(M), \text{ где } \lim_{M \rightarrow A} \alpha(M) = 0$$

Функция $f(M)$ **удовлетворяет в точке $M = A$ условию Коши**, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$: для $\forall M'$ и M'' из области задания функции $f(M)$, удовлетворяющих $0 < \rho(M', A) < \delta, 0 < \rho(M'', A) < \delta$, для соответствующих значений функций: $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$

Т(критерий Коши). Чтобы функция $f(M)$ имела конечное предельное значение в точке $M = A$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(M)$ удовлетворяла в этой точке условию Коши.

Док-во. **Необх-сть.** Пусть $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = b$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$, по О2 для $\varepsilon / 2 \exists \delta > 0$: для $\forall M'$ и M'' из области задания $f(M)$:

$$0 < \rho(M', A) < \delta, 0 < \rho(M'', A) < \delta \text{ для соответ-щих значений функций:}$$

$$|f(M') - b| < \varepsilon / 2, |f(M'') - b| < \varepsilon / 2 \Rightarrow |f(M') - f(M'')| = |f(M') - b| + |f(M'') - b| \leq$$

$$\leq |f(M') - b| + |f(M'') - b| < \varepsilon \Rightarrow f(M) \text{ удовлетворяет в точке } M = A \text{ условию Коши.}$$

Дост-сть. Пусть $f(M)$ удовлетворяет в точке $M = A$ условию Коши и $\{M_n\} - \forall$ последовательность: $\{M_n\} \rightarrow A, M_n \neq A$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ и соответствующее $\delta > 0$, чтобы выполнялось условие Коши, для этого δ выберем номер $N : 0 < \rho(M_n, A) < \delta$ при $n \geq N$ (это можно сделать, т.к. $\{M_n\} \rightarrow A \Rightarrow$ для $\forall p (=1, 2, \dots)$

$$0 < \rho(M_{n+p}, A) < \delta \text{ при } n \geq N \Rightarrow \text{в силу условия Коши}$$

$$|f(M_{n+p}) - f(M_n)| < \varepsilon \text{ при } n \geq N \Rightarrow \text{фундаментальность послед-сти } \{f(M_n)\} \Rightarrow \text{сходимость } \{f(M_n)\} \text{ к некоторому } b.$$

Возьмем $\forall \{M_n\} \rightarrow A, \{M'_n\} \rightarrow A$, пусть $\{f(M_n)\} \rightarrow b$,

$\{f(M'_n)\} \rightarrow b'$. Тогда посл-сть $M_1, M'_1, \dots, M_n, M'_n$ сходится к $A \Rightarrow f(M_1), f(M'_1), \dots, f(M_n), f(M'_n)$ сходится, а т.к. все ее подпоследовательности сходятся к одному и тому же пределу, то $b = b'$.

19. Непрерывность функции и переменных. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Пусть $A \in$ области задания $u = f(M)$ нескольких переменных и $\forall \varepsilon$ -окрестность A содержит $\neq A$ точки области задания $f(M)$.

О1. Φ -я $u = f(M)$ называется непрерывной в A , если предел этой функции в точке A $\exists$ и равен $f(A)$.

$$A = \lim_{M \rightarrow A} M \Rightarrow \lim_{M \rightarrow A} f(M) = f\left(\lim_{M \rightarrow A} M\right)$$

О2. Φ -я $u = f(M)$ называется непрерывной в A , если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: для всех M из области задания функции: $\rho(M, A) < \delta$, выполняется $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

О3. Φ -я $u = f(M)$ называется непрерывной на мн-ве $\{M\}$, если она непрерывна в $\forall$ точке $\{M\}$.

Пусть для $\forall M(x_1, \dots, x_m)$ из области задания Φ -ции и $A(a_1, \dots, a_m): x_1 - a_1 = \Delta x_1, \dots, x_m - a_m = \Delta x_m$. **Полное приращение** $u = f(M)$ в A :

$$\Delta u = f(M) - f(A) = f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, \dots, a_m)$$

Для непрерывности $u = f(M)$ в A необходимо и достаточно, чтобы ее приращение Δu являлось бесконечно малой в A функцией:

$$\lim_{M \rightarrow A} \Delta u = \lim_{M \rightarrow A} (f(M) - f(A)) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} \Delta u = 0$$

Это разностная форма условия непрерывности $u = f(M)$ в A .

Зафиксируем все x_i , кроме k -го, x_k придадим $\forall$ приращение Δx_k , чтобы $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in$ области задания $f(M)$.

Частное приращение в $M(x_1, \dots, x_m)$, соответствующее Δx_k :

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Φ -я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется непрерывной в $M(x_1, \dots, x_m)$ по переменной x_k , если частное приращение $\Delta_{x_k} u$ этой Φ -и в точке M является бесконечно малой функцией от Δx_k :

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_{x_k} u = 0$$

Из непрерывности $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в $M \Rightarrow$ ее непрерывность в M по $\forall$ переменной $x_1, \dots, x_m$. Наоборот нет.

1°. **У1.** Пусть $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в A . Тогда $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $f(M) / g(M)$ непрерывны в A (частное при $g(A) \neq 0$).

Док-во. $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в $A \Rightarrow$ по О1 они имеют в A пределы $f(A)$ и $g(A) \Rightarrow$ предельные значения $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $f(M) / g(M)$ существуют и равны соответственно $f(A) + g(A)$, $f(A) - g(A)$, $f(A) \cdot g(A)$, $f(A) / g(A) \Rightarrow$ по О1 они непрерывны в A .

2°. Пусть Φ -ции $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$ (1) заданы на мн-ве $\{N\}$ евклидова пр-ва E^k , $t_1, \dots, t_k$ - координаты точек в $E^k \Rightarrow \forall N(t_1, \dots, t_k)$ из $\{N\}$ ставится в соответствие с помощью (1) точка $M(x_1, \dots, x_m)$ евклидова пр-ва E^m . Пусть $\{M\}$ - мн-во всех этих точек, $u = f(x_1, \dots, x_m)$ - функция t переменных, заданная на $\{M\} \Rightarrow$ на мн-ве $\{N\}$ пр-ва E^k определена сложная функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_1, \dots, x_m$ - функции определяются формулами (1).

У2. Пусть Φ -и $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$ непрерывны в $A(a_1, \dots, a_k)$, а Φ -я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна в $B(b_1, \dots, b_m)$, где $b_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_k)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда сложная Φ -я $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_1, \dots, x_m$ - определенные выше Φ -и аргументов $t_1, \dots, t_k$, непрерывна в $A(a_1, \dots, a_k)$.

Док-во. Пусть $\{N_n\}$, $N_n \neq A - \forall$ сходящаяся к A послед-сть точек из области $\{N\}$ задания функций $\varphi_i(t_1, \dots, t_k)$, а $\{M_n\}$ - соответ-щая послед-сть точек: $x_i^{(n)} = \varphi_i(t_1^{(n)}, \dots, t_k^{(n)})$. Φ -и φ_i непрерывны в $A \Rightarrow \{M_n\} \rightarrow B(b_1, \dots, b_m)$. Φ -я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна в $B \Rightarrow \{f(M_n)\} \rightarrow f(B)$. Но $\{f(M_n)\}$ - это послед-сть значений слож-ной функции, отвечающая сходящейся к A последовательности $\{N_n\}$ точек области ее задания $\Rightarrow$ непрерывность сложной Φ -ции.

3°. **Т1.** Если $u = f(M)$ непрерывна в $A \in E^m$ и $f(A) \neq 0$, то $\exists$ такая ε -окрестность точки A , в пределах которой во всех точках области своего задания $f(M)$ не обращается в 0 и имеет знак, совпадающий со знаком $f(A)$.

Док-во. $u = f(M)$ непрерывна в $A \Rightarrow$ по О1 $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = b$, где $b = f(A) \neq 0$ и по О2 для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что для всех M из области задания Φ -и: $\rho(M, A) < \delta$, выполняется $|f(M) - f(A)| < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < f(M) < b + \varepsilon$ при $\rho(M, A) < \delta$. Если взять $\varepsilon < |b|$, то $b - \varepsilon, b + \varepsilon$ и b будут одного знака $\Rightarrow$ всюду в ε -окрестности $f(M)$ сохраняет знак числа $b = f(A)$.

4°. **Т2.** Пусть $u = f(M)$ непрерывна во всех точках связного мн-ва $\{M\}$ евклидова пр-ва E^m , причем $f(A)$ и $f(B)$ - значения этой функции в точках A и B этого мн-ва. Пусть $C - \forall$ число между $f(A)$ и $f(B)$. Тогда на $\forall$ непрерывной кривой L , соединяющей A и B и целиком расположенной в $\{M\}$, $\exists N: f(N) = C$.

Док-во. Пусть $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_m = \varphi_m(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ - уравнения непрерывной кривой L , соединяющей A и $B \in \{M\}$ и целиком расположенной в $\{M\}$. На $[\alpha, \beta]$ определена сложная Φ -я $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $\alpha \leq t \leq \beta$, ее значения на $[\alpha, \beta]$ совпадают со значениями $u = f(M)$ на кривой L . Эта слож-ная Φ -я 1 переменной t по У2 непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и по теореме о прохождении непрерывной функции от 1 переменной через $\forall$ промежуточное значение в некоторой точке $\xi \in [\alpha, \beta]$ принимает значение $C \Rightarrow$ в $N \in L$ с координатами $\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_m(\xi): f(N) = C$.

5°. **Т3 (1-я Вейерштрасса).** Если $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$, то она ограничена на этом мн-ве.

Док-во. Пусть $u = f(M)$ не ограничена сверху на $\{M\}$. Выделим послед-сть $\{M_n\}$ точек мн-ва $\{M\}: f(M_n) > n$. По Т Больцано - Вейерштрасса из $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся подпослед-сть $\{M_{kn}\} \rightarrow M, M \in \{M\}$. Послед-сть $\{f(M_{kn})\}$ бесконечно большая. Но из непрерывности $f(M)$ в $M = \Rightarrow \{f(M_{kn})\}$ должна сходиться к $f(M)$. Противоречие.

6°. **Т4 (2-я Вейерштрасса).** Если $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$, то она достигает на этом множестве своих ТВГ и ТНГ.

Док-во. Пусть $f(M)$ на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$ не достигает своей ТВГ $N \Rightarrow$ для всех точек мн-ва $\{M\}: f(M) < N$ и функция $F(M) = 1/(N - f(M)) > 0$, не обращается в 0 и по У1 непрерывна на $\{M\} \Rightarrow$ по Т3 $F(M)$ ограничена на $\{M\}$, т.е. $\exists B$, что для всех $M \in \{M\}: F(M) = 1/(N - f(M)) \leq B \Rightarrow$

т.к. $N - f(M) > 0$, то $f(M) \leq N - 1/B$ для всех $M \in \{M\} \Rightarrow$

противоречит тому, что N - наименьшая из всех верхних граней.

7°. Функция $u = f(M)$ называется равномерно непрерывной на мн-ве $\{M\}$ евклидова пр-ва E^m , если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall M' \text{ и } M'' \in \{M\}: \rho(M', M'') < \delta$, выполняется $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$.

Т5 (о равномерной непрерывности). Непрерывная на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$ функция равномерно непрерывна на $\{M\}$.

Док-во. Пусть непрерывная на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$ функция $u = f(M)$ не является равномерно непрерывной на $\{M\}$, т.е. $\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \exists M' \text{ и } M'' \in \{M\}$, удовлетворяющих условию $\rho(M', M'') < \delta$, но $|f(M') - f(M'')| \geq \varepsilon \Rightarrow$

для $\forall \delta_n = 1/n \exists M_n' \text{ и } M_n'' \in \{M\}: \rho(M_n', M_n'') < 1/n$, но

$|f(M_n') - f(M_n'')| \geq \varepsilon$. Т.к. $\{M_n\}$ - послед-сть точек замкнутого ограниченного мн-ва $\{M\}$, то по Т Больцано - Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся к некоторой A подпослед-сть $\{M_{kn}\}$. Подпослед-сть $\{M_{kn}\}$ послед-сти $\{M_n\}$ также сходится к A . $f(M)$ непрерывна в $A \Rightarrow \{f(M_{kn}')\} \rightarrow f(A)$ и $\{f(M_{kn}'')\} \rightarrow f(A) \Rightarrow |f(M_{kn}') - f(M_{kn}'')| \rightarrow 0$ - бесконечно малая послед-сть, это противоречит $|f(M_n') - f(M_n'')| \geq \varepsilon \Rightarrow u = f(M)$ равномерно непрерывна на $\{M\}$.

20. Понятие дифф-сти функции нескольких переменных.

Достаточное условие дифф-сти. Касательная плоскость.

$M(x_1, \dots, x_m)$ – внутренняя точка области задания $u = f(x_1, \dots, x_m)$.

Отношение частного приращения Δx_k и в фиксированной

$M(x_1, \dots, x_m)$ к соответствующему приращению Δx_k аргумента x_k

$$\frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{\Delta x_k} \quad (1)$$

является ф-цией от Δx_k , определенной для всех, $\neq 0$, значений Δx_k , для которых $M(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in$ области задания u .

О. Если $\exists$ предел отношения (1) частного приращения Δx_k и функции в $M(x_1, \dots, x_m)$ к соответствующему приращению Δx_k аргумента x_k при $\Delta x_k \rightarrow 0$, то этот предел называется **частной производной** функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ точке M по аргументу x_k :

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k}$$

Полное приращение $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в $M(x_1, \dots, x_m)$, соответствующее приращениям $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$:

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$$

О. Ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется **дифференцируемой** в $M(x_1, \dots, x_m)$, если ее полное приращение в M можно представить:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (2)$$

где $A_1, \dots, A_m$ – некоторые не зависящие от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ числа, а $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – бесконечно малые при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ функции, равные 0 при $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$.

(2) – условие дифференцируемости ф-и в M . Другая форма:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho) \quad (3)$$

где ρ – бесконечно малая при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ функция $\rho =$

$\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$, $\rho = 0$ при $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$. Условия (2) и (3)

эквивалентны, т.к.: 1) при $\rho \neq 0$

$$\frac{\Delta x_i}{\rho} \leq 1 \Rightarrow |\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m| \leq$$

$$\leq \left\{ |\alpha_1| \frac{|\Delta x_1|}{\rho} + \dots + |\alpha_m| \frac{|\Delta x_m|}{\rho} \right\} \rho \leq \{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m|\} \rho = o(\rho)$$

$\Rightarrow$ сумма $\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$ является бесконечно малой более

высокого порядка по сравнению с ρ , $o(\rho) = 0$ при $\rho = 0$. Т.о. (2) $\Rightarrow$ (3)

2) пусть не все $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ равны 0 $\Rightarrow$

$$o(\rho) = \frac{o(\rho) \rho^2}{\rho} = \frac{o(\rho) \Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}{\rho} =$$

$$= \left[\frac{o(\rho) \Delta x_1}{\rho} \right] \Delta x_1 + \dots + \left[\frac{o(\rho) \Delta x_m}{\rho} \right] \Delta x_m. \text{ Пусть } \left[\frac{o(\rho) \Delta x_i}{\rho} \right] \Delta x_i = \alpha_i$$

и учитывая, что α_i – бесконечно малая при $\rho \rightarrow 0$ (и при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$) функция, получим (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2)

Если хотя бы 1 из $A_1, \dots, A_m$ отлично от 0, то $A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m$ – главная, линейная относительно приращений аргументов часть приращения дифференцируемой функции.

Т1. Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифф-ма в $M(x_1, \dots, x_m)$, то в этой точке $\exists$ частные производные по всем аргументам, причем $\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$, где A_i определяются из условия (2) или (3) дифф-сти функции.

Док-во. Из (2) $\Rightarrow$ частное приращение функции в этой точке:

$$\Delta x_i u = A_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i \Rightarrow \frac{\Delta x_i u}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i \Rightarrow$$

$$\text{т.к. } \alpha_i \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x_i \rightarrow 0, \text{ то } \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i u}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$$

Сл1. Условие (3) диффе-сти функции в M можно записать в форме (все частные производные берутся в M)

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho) \quad (4)$$

Сл2. Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в $M(x_1, \dots, x_m)$, то представление ее приращения Δu в форме (2) или (3) единственно.

(т.к. коэффициенты A_i этих представлений = частным производным в данной $M \Rightarrow$ определяются единственным образом).

Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифф-а в $M(x_1, \dots, x_m)$, то она и непрерывна в M . (т.к. из (2) $\Rightarrow \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0} \Delta u = 0 \Rightarrow$ функция непрерывна в M)

Плоскость π , проходящая через точку N_0 поверхности, называется **касательной плоскостью** в этой точке, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку N_0 и $\forall$ точку N_1 поверхности, стремится к 0, когда $N_1 \rightarrow N_0$.

Если в N_0 $\exists$ касательная плоскость, то касательная в N_0 к $\forall$ кривой, расположенной на поверхности и проходящей через N_0 , лежит в указанной плоскости.

Убедимся, что из условия дифф-сти функции $u = f(x, y)$ в данной $M_0(x_0, y_0) \Rightarrow$ существование касательной плоскости к графику S этой

ф-и в точке $N_0(x_0, y_0, u_0)$. Пусть $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta u = u - u_0$,

где $u = f(x_0, y_0)$, $u = f(x, y) \Rightarrow$ условие (2):

$$u - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha \Delta x + \beta \Delta y = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho)$$

где $A = \frac{\partial u}{\partial x}$ и $B = \frac{\partial u}{\partial y}$ – постоянные, α и β – бесконечно малые при

$$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Уравнение $U - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ определяет в декартовой

системе (x, y, U) некоторую плоскость π , проходящую через $N_0(x_0, y_0, u_0)$ и имеющую нормальный вектор $\mathbf{n} = \{A, B, -1\}$.

Косинус угла φ между $\mathbf{n}$ и вектором $N_0 N_1$ секущей с координатами $x - x_0, y - y_0, u - u_0$:

$$\cos \varphi = \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) - (u - u_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (u - u_0)^2}}$$

Из условия дифференцируемости $u = f(x, y) \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) - (u - u_0) = o(\rho) \Rightarrow$

$$|\cos \varphi| \leq \frac{|o(\rho)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{|o(\rho)|}{\rho}$$

$\Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \cos \varphi = 0$, т.е. $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varphi = \pi/2$ и π – касательная плоскость к S в точке N_0 .

Т.о., дифф-сть $u = f(x, y)$ в $M_0(x_0, y_0)$ геометрически означает наличие касательной плоскости к графику функции $u = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, u_0)$. Т.к. A и B – производным, вычисленным в $M_0(x_0, y_0)$, то уравнение касательной плоскости:

$$U - u_0 = \frac{\partial u}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y} (y - y_0)$$

Нормальный вектор $\mathbf{n} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1 \right\}$ касательной плоскости

называется **нормалью** к поверхности $u = f(x, y)$ в $N_0(x_0, y_0, u_0)$.

Т2 (достаточное условие дифф-сти). Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, причем все эти частные производные непрерывны в M_0 , то функция дифф-ма в M_0 .

Док-во. Для ф-и 2 переменных $u = f(x, y)$. Пусть f'_x и f'_y $\exists$ в окрестности $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывны в ней. Дадим x и y столь малые приращения Δx и Δy , чтобы $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in$ этой окрестности M_0 . Полное приращение

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

Выражение $[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)]$ – приращение ф-ции $f(x_0, y_0 + \Delta y)$ переменной x на $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Т.к. $u = f(x, y)$ имеет частные производные, то $f(x_0, y_0 + \Delta y)$ дифф-ма и ее производная по x – это f'_x . По Т Лагранжа, $\exists$ такое θ_1 из

$$0 < \theta_1 < 1: [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] =$$

$$= f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x$$

Ан-но, для некоторого θ_2 из $0 < \theta_2 < 1$:

$$[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y$$

f'_x и f'_y непрерывны в $M_0 \Rightarrow$

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha,$$

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta,$$

где α и β – бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

$\Rightarrow u = f(x, y)$ дифф-ма в M_0 .

21. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Инвариантность формы 1-го дифференциала.

О. Ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется дифференцируемой в $M(x_1, \dots, x_m)$, если ее полное приращение в M можно представить в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (1)$$

где $A_1, \dots, A_m$ – некоторые не зависящие от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ числа, а $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – бесконечно малые при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ функции, равные 0 при $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$.

$A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m$ – главная, линейная относительно приращений аргументов часть.

О. Дифференциалом du дифф-мой в $M(x_1, \dots, x_m)$ ф-и $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется главная линейная относительно приращений аргументов часть приращения этой функции в M . Если в представлении (1) все коэффициенты $A_i = 0$, то $du = 0$ в M .

$$du = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m \quad (2)$$

Дифференциал dx_i независимой переменной $x_i - \forall$ (не зависящее от $x_1, \dots, x_m$) число. Пусть $dx_i = \Delta x_i = >$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m$$

Сложная функция вида $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$ (3)

Т1. Пусть функции (3) дифф-мы в некоторой $M(t_1^\circ, \dots, t_k^\circ)$, а $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифф-ма в соотв-щей $N(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$, где $x_i^\circ = \varphi_i(t_1^\circ, \dots, t_k^\circ)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда сложная ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_1, \dots, x_m$ определяются формулами (3), дифф-ма в M . При этом частные производные этой сложной функции в M :

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k}$$

в которых все $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ берутся в точке N , а все $\frac{\partial x_i}{\partial t_1}$ – в точке M .

Док-во. Придадим аргументам $t_1, \dots, t_k$ в точке $M(t_1^\circ, \dots, t_k^\circ) \forall$ приращения $\Delta t_1, \dots, \Delta t_k$, одновременно $\neq 0$. Им соответствуют приращения $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ функций (3) в M . Им соответствует приращение Δu в N . Т.к. $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в $N \Rightarrow$

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (5)$$

где $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ берутся в N , $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – бесконечно малые при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ функции, равные 0 при $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$.

Т.к. ф-и (3) дифф-мы в $M(t_1^\circ, \dots, t_k^\circ)$, приращения $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$:

$$\Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_1} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

где $\frac{\partial x_i}{\partial t_1}$ берутся в M , а $\rho = \sqrt{\Delta t_1^2 + \dots + \Delta t_k^2}$

Надо убедиться, что после подстановки в правую часть (5) выражений (6) приращение Δu будет

$$\Delta u = A_1 \Delta t_1 + \dots + A_k \Delta t_k + o(\rho) \quad (7)$$

где

$$A_i = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_i} \quad i = 1, \dots, k \quad (8)$$

Тогда теорема будет доказана, т.к. (7) означает дифф-ть сложной функции, а (8) – это ее частная производная. При подстановке в правую часть (5) выражений (6), кроме группы слагаемых $A_1 \Delta t_1 + \dots + A_k \Delta t_k$ получаются и другие группы слагаемых. Но они являются величиной $o(\rho)$, т.к.

1°. Все $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в (5) берутся в N , т. е. являются постоянными числами, которые при умножении на $o(\rho)$ дают $o(\rho)$.

2°. Из (6) $\Rightarrow$ все Δx_i ($i = 1, \dots, m$) удовлетворяют $|\Delta x_i| \leq \text{const } \rho$.

3°. Все α_i в (5) – бесконечно малые при $\rho \rightarrow 0$ функции, т.к. все α_i – бесконечно малые при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$. Но все ф-и (3) дифф-мы $\Rightarrow$ непрерывны в $M \Rightarrow \Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$.

4°. Из пп. 2° и 3° $\Rightarrow$ каждое $\alpha_i \Delta x_i$ является величиной $o(\rho)$.

3. Если ф-и (3) зависят от 1 аргумента t , то u – сложная ф-я 1 переменной $t: u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_i = \varphi_i(t)$. Ее производная:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{dx_m}{dt} \quad (9)$$

Ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$, заданная на мн-ве $\{M\}$, называется однородной функцией степени p на $\{M\}$, если для $\forall M(x_1, \dots, x_m) \in \{M\}$ и для $\forall t: N(t x_1, \dots, t x_m) \in \{M\}$ выполняется

$$f(t x_1, \dots, t x_m) = t^p f(x_1, \dots, x_m) \quad (10)$$

Т2 (Эйлера об однородных функциях). Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$ является в некоторой области $\{M\}$ дифф-ой однородной функцией степени p , то в $\forall M(x_1, \dots, x_m) \in \{M\}$ справедливо равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} x_m = p u \quad (11)$$

Док-во. Пусть $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ) - \forall$ точка области $\{M\}$. Рассмотрим сложную ф-ю $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_i = t x_i^\circ$ ($i = 1, \dots, m$), т. е.

$u = f(t x_1^\circ, \dots, t x_m^\circ)$. Т.к. при $t = 1$ ф-и $x_i = t x_i^\circ$ дифф-мы и $u = f(x_1, \dots, x_m)$ диф-ма в соответствующей M_0 , то, по Т1 и замечанию, можно вычислить $\frac{du}{dt}$ в точке $t = 1$ по (9).

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = x_i^\circ \Rightarrow \frac{du}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} x_1^\circ + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} x_m^\circ \quad (12)$$

где $\frac{du}{dx_i}$ берутся в M_0 . С другой стороны, в силу (10):

$$u = f(t x_1^\circ, \dots, t x_m^\circ) = t^p f(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ) \quad (13)$$

Из (13) $\Rightarrow \frac{du}{dt} = p t^{p-1} f(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$, т. е.

$$\frac{du}{dt} \Big|_{t=1} = p f(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ) = p u \quad (14)$$

Из (12) и (14) $\Rightarrow$ (11) для произвольной $M_0 \Rightarrow$ теорема доказана.

Инвариантность формы 1-го дифференциала: формула

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m \quad (15)$$

универсальна и справедлива, когда $x_1, \dots, x_m$ – дифф-мые функции новых переменных $t_1, \dots, t_k$.

Пусть аргументы $x_1, \dots, x_m$ ф-и $u = f(x_1, \dots, x_m)$ являются дифф-мыми в $A(t_1^\circ, \dots, t_k^\circ)$ функциями $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$, и $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифф-ма в $B(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$, где $x_i^\circ = \varphi_i(t_1^\circ, \dots, t_k^\circ) \Rightarrow u$ – сложная функция аргументов $t_1, \dots, t_k$, по Т1 дифф-ма в $A \Rightarrow$ ее дифференциал:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial t_k} dt_k \quad (16)$$

где $\frac{du}{dt_i}$ определяются из (4). Подставляя $\frac{du}{dt_i}$ из (4) в (16) и собирая

коэффициенты при $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ получим

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k \right) + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k \right)$$

Коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ дифференциалу dx_i ф-ции $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_k) \Rightarrow$ получим для дифференциала du сложной функции формулу (15), в которой дифференциалы dx_i будут дифференциалами функций $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$.

22. Производная по направлению. Градиент.

Пусть $u = f(x, y, z)$ 3 переменных x, y и z задана в некоторой окрестности $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Рассмотрим некоторое направление, определяемое единичным вектором $\mathbf{a}$ с координатами $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$. Проведем через M_0 ось $\mathbf{1}$, направление которой совпадает с направлением $\mathbf{a}$, возьмем на этой оси

$\forall M(x, y, z)$ и пусть l – величина направленного отрезка M_0M .

Координаты x, y, z точки M :

$$x = x_0 - l \cos \alpha, \quad y = y_0 - l \cos \beta, \quad z = z_0 - l \cos \gamma \quad (1)$$

На оси $\mathbf{1}$ ϕ –я $u = f(x, y, z)$ – сложной ϕ –я одной переменной l . Если эта функция имеет в $l = 0$ производную по переменной l , то эта производная называется **производной по направлению $\mathbf{1}$** от

$u = f(x, y, z)$ в M_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dl} \Rightarrow \\ \left[\text{т.к. } \frac{dx}{dl} &= \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dl} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{dl} = \cos \gamma \right] \Rightarrow \\ \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (2) \end{aligned}$$

Градиентом дифф–мой в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функции $u = f(x, y, z)$ в M_0 называется вектор

$\text{grad } u$, имеющий координаты, соответственно равные производным $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, взятым в M_0 :

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

Т.к. вектор $\mathbf{a}$, определяющий направление оси $\mathbf{1}$, имеет координаты $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, представим выражение (2) в виде скалярного произведения векторов $\text{grad } u$ и $\mathbf{a}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{a} \cdot \text{grad } u \quad (3)$$

Покажем, что **градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 характеризует направление и величину максимального роста этой ϕ –и в M_0** , т.е., производная функции u в M_0 по направлению, определяемому градиентом этой функции в M_0 , имеет максимальное значение по сравнению с производной по $\forall$ другому направлению в M_0 , а значение указанной производной равно длине вектора $|\text{grad } u|$.

Перепишем (3) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\mathbf{a}| |\text{grad } u| \cos \varphi = [\text{т.к. } |\mathbf{a}| = 1] = |\text{grad } u| \cos \varphi$$

где φ – угол между $\text{grad } u$ и $\mathbf{a} \Rightarrow$ максимальное значение производной по направлению при

$\cos \varphi = 1$, т.е. когда направление $\mathbf{a}$ совпадает с направлением $\text{grad } u$, при этом

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\max} = |\text{grad } u|$$

3. Для ϕ –и $u = f(x, y)$ 2 переменных x и y единичный вектор $\mathbf{a}$, определяющий направление в M_0 , имеет координаты $\{\cos \alpha, \sin \alpha\} \Rightarrow$ (2) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha$$

Для ϕ –и 2 переменных градиент дифф–мой функции $u(x, y)$ – вектор с координатами $\left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right\}$, формула (3) также справедлива. Для

функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ m переменных $x_1, \dots, x_m$ аналогично.

Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ в $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ по направлению $\mathbf{1}$, которое задается единичным вектором $\mathbf{a} = \{\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_m\}$ (где $\cos^2 \alpha_1 + \dots + \cos^2 \alpha_m = 1$), определяется как производная по l сложной ϕ –и $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где

$x_1 = x_1^0 - l \cos \alpha_1, \dots, x_m = x_m^0 - l \cos \alpha_m$. Если

$u = f(x_1, \dots, x_m)$ – дифф–мая функция, для производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos \alpha_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cos \alpha_m$$

Градиентом ϕ –и в данной $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ называется вектор

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m} \right\}$$

производные берутся в M_0 . Также справедлива (3).

23. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных.

Пусть $u = f(x_1, \dots, x_m)$, определенной в области $\{M\}$, в $\forall M \in \{M\}$
 $\exists \frac{\partial u}{\partial x_i}$ по $x_i \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$ – функция от $x_1, \dots, x_m$, тоже определенная в $\{M\}$.

Если она имеет частную производную по x_k в некоторой $M \in \{M\}$, то ее называют **2-ой частной производной** $u = f(x_1, \dots, x_m)$

в M сначала по x_i , а затем по x_k : $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$, $f_{x_i x_k}^{(2)}$, $u_{x_i x_k}^{(2)}$
 n -я частная производная вводится **индуктивно**. Если введено понятие $(n-1)$ -й частной производной Φ и $u = f(x_1, \dots, x_m)$ по $x_{i_1}, \dots, x_{i_{(n-1)}}$ и она имеет в M частную производную по x_{i_n} , то ее называют n -й частной производной $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в M по $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right)$$

Если не все $i_1, \dots, i_n$ совпадают, то част. производная – **смешанная**
 Φ – $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется **n раз дифф-мой** в $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, если все частные производные $(n-1)$ -го порядка этой Φ и являются дифф-мыми функциями в M_0 .

У. Чтобы $u = f(x_1, \dots, x_m)$ была n раз дифф-мой в $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, достаточно, чтобы все ее частные производные n -го порядка были непрерывными в M_0 . ($\Rightarrow$ из определения дифф-сти функции и теоремы о достаточных условиях дифф-сти)

Т1. Пусть $u = f(x, y)$ дважды дифференцируема в $M_0(x_0, y_0)$. Тогда в M_0 $f_{xy}^{(2)} = f_{yx}^{(2)}$.

Док-во. $u = f(x, y)$ дважды дифф-ма в $M_0(x_0, y_0) \Rightarrow f'_x$ и f'_y определены в окрестности M_0 и дифф-мы в M_0 . Рассмотрим

$$\Phi = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0) \quad (1)$$

где $h - \forall$ столь малое число, что $M(x_0 + h, y_0 + h)$ находится в этой окрестности M_0 . Φ – приращение $\Delta \varphi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$ дифф-мой на $[x_0, x_0 + h]$ Φ и $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$ переменной $x \Rightarrow$ по Т. Лагранжа, $\exists \theta < \theta < 1$:

$$\Phi = \Delta \varphi = \varphi'(x_0 + \theta h)h = [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)]h = \{ [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)] - [f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)] \} h \quad (2)$$

Т.к. f'_x дифф-ма в $M_0 \Rightarrow [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)] = f''_{xx}(x_0, y_0) \theta h + f''_{xy}(x_0, y_0) h + \alpha_1 \theta h +$

$+\beta_1 h [f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)] = f''_{xx}(x_0, y_0) \theta h + \alpha_2 \theta h$
 где $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ – бесконечно малые при $h \rightarrow 0$. Подставляя в (2):

$$\Phi = [f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha] h^2 \quad (3)$$

где $\alpha = \alpha_1 \theta + \beta_1 - \alpha_2 \theta$ – бесконечно малая при $h \rightarrow 0$ функция. С др. стороны, (1) для Φ – приращение $\Delta \psi = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0)$ дифф-мой на $[y_0, y_0 + h]$ Φ и $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$:

$$\Phi = [f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta] h^2 \quad (4)$$

где β – бесконечно малая при $h \rightarrow 0$. (3) = (4) и сократить на h^2 :

$$f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha = f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta$$

α и β – бесконечно малые при $h \rightarrow 0 \Rightarrow f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Т2. Пусть $u = f(x_1, \dots, x_m)$ n раз дифф-ма в $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$. Тогда в M_0 значение $\forall$ смешанной частной производной n -го порядка не зависит от порядка последовательных дифференцирований.

Док-во. Достаточно доказать для 2 последовательных дифф-ний:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}} \quad (5)$$

Т.к. $\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}$ – дважды дифф-мая Φ – я переменных x_{i_k} и $x_{i_{k+1}}$, то по

$$\text{T1} \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}$$

$\Rightarrow$ справедливость (5).

Дифф-лы высших порядков. 1-й дифференциал дифф-мой в $M(x_1, \dots, x_m)$ Φ и $u = f(x_1, \dots, x_m)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m \quad (6)$$

Пусть правая часть (6) – функция от $x_1, \dots, x_m$, дифф-мая в $M(x_1, \dots, x_m)$. Достаточно, чтобы $u = f(x_1, \dots, x_m)$ была 2 раза дифф-ма в M , а аргументы были либо независимыми переменными, либо 2 раза дифф-мыми Φ -ями некоторых независимых переменных.

О1. Значение $\delta(du)$ дифференциала от 1-го дифференциала (6), взятое при $\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m$, называется **2-ым дифференциалом** Φ и $u = f(x_1, \dots, x_m)$ (в данной $M(x_1, \dots, x_m)$)

$$d^2 u = \delta(du)|_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} = \left\{ \delta \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k \right] \right\}_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} \quad (7)$$

Пусть введен дифференциал $d^{n-1}u$ порядка $n-1$ и $u = f(x_1, \dots, x_m)$ n раз дифф-ма в данной $M(x_1, \dots, x_m)$, а ее аргументы или независимые переменные, или n раз дифф-мые функции некоторых независимых переменных.

О2. Значение $\delta(d^{n-1}u)$ дифференциала от $(n-1)$ -го дифференциала $d^{n-1}u$, взятое при $\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m$, называется n -м дифференциалом $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в M : $d^n u = \delta(d^{n-1}u)|_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m}$

При вычислении 2-го и последующих дифференциалов 2 случая:

1) $x_1, \dots, x_m$ – независимые переменные $\Rightarrow dx_1, \dots, dx_m$ не зависят от $x_1, \dots, x_m$. Каждый dx_k можно взять = одному и тому же приращению Δx_k для $\forall M(x_1, \dots, x_m) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \delta(dx_k) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(dx_k)}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \Rightarrow \quad (7) \\ &= \sum_{k=1}^m \delta \left[\frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k \right]_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} = \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ dx_k \cdot \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_k} \delta(dx_k) \right\}_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ dx_k \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \delta x_i \right\}_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} = \\ &= \left[\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \delta x_i \cdot dx_k \right]_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k \quad (8) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d^2 u = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k \quad (9)$$

31. По индукции для n -го дифференциала:

$$\begin{aligned} d^n u &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_n} \\ &= [\text{используя оператор диф – ла}] \\ &= \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n u \quad (10) \end{aligned}$$

2) $x_1, \dots, x_m$ – соответствующее число раз дифф-мые функции независимых переменных $t_1, \dots, t_k$:

$$\begin{aligned} d^2 u &= \delta(du)|_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} = \sum_{k=1}^m \left\{ dx_k \cdot \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_k} \delta(dx_k) \right\}_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} = \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ dx_k \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \delta x_i \right\}_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} + \\ &+ \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_k} \delta(dx_k) \right\}_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} = \\ &= \left[\text{по опр – ию 2 – го диф – ла} u \right. \\ &= \left. x_k : \left[\delta(dx_k) \right]_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} = d^2 x_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k + \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} d^2 x_k = \\ &= [\text{используя оператор диф – ла}] = \\ &= \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 u \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} d^2 x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} d^2 x_m \right) \quad (11) \end{aligned}$$

Из (11) и (10) $\Rightarrow$ 2-й и последующие дифференциалы не обладают свойством инвариантности формы, но обладают этим свойством, если $x_1, \dots, x_m$ – **линейные функции** независимых переменных $t_1, \dots, t_k$, т.к. $\forall$ частная производная выше 1-го порядка от линейной Φ и $=0$ и $d^2 x_i = 0, \dots, d^m x_i = 0$.

24. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Дифф-л k -го порядка ф-и $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в $M: d^k u|_M$

Т. Пусть ф-я $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ задана в некоторой ε -окрестности $M_0(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$ и $n+1$ раз дифф-ма в этой ε -окрестности. Тогда полное приращение $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ этой функции в M_0 для $\forall$ точки M из этой ε -окрестности можно представить в следующей форме:

$$\Delta u = du|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2 u|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^n u|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} u|_N \quad (1)$$

где N – некоторая точка ε -окрестности, зависящая от M_0 , а дифференциалы dx_i переменных x_i , входящие в $d^k u|_M$ и $d^{n+1} u|_N$, равны $\Delta x_i = x_i - x_i^\circ$.

Док-во. Проведем для $u = f(x, y)$ 2 переменных x и y . Формула Тейлора для $n+1$ раз диф-мой в некоторой окрестности t_0 функции $u = F(t)$ одной переменной t с центром разложения в t_0 (остаточный член в форме Лагранжа), $0 < \theta < 1$:

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} F^{(2)}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))(t - t_0)^{n+1} \quad (2)$$

t – независимая переменная $\Rightarrow$ приращение $\Delta t = t - t_0$ – дифференциал dt независимой переменной $t \Rightarrow$

$$F^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k = F^{(k)}(t_0) dt^k = d^k F(t_0) = d^k u|_{t_0}$$

$$F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))(t - t_0)^{n+1} = d^{n+1} u|_{t_0 + \theta(t - t_0)} \quad (3)$$

Обозначим $\Delta u = F(t) - F(t_0)$, согласно (3), формулу Тейлора (1) можно записать в форме:

$$\Delta u = du|_{t_0} + \frac{1}{2!} d^2 u|_{t_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^n u|_{t_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} u|_{t_0 + \theta(t - t_0)} \quad (4)$$

Рассмотрим в ε -окрестности $M_0(x_0, y_0) \forall$ точку

$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и соединим точки M_0 и M прямой линией $\Rightarrow$ координаты x и y точек этой прямой – линейные функции новой переменной t :

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y \quad (5)$$

при этом координаты точек отрезка M_0M соответствуют значениям переменной t из сегмента $[0, 1]$. Значению $t = 0$ отвечает точка M_0 , а значению

$t = 1$ – точка M . Т.к. по условию $u = f(x, y)$ двух переменных x и y в ε -окрестности точки M_0 $n+1$ раз дифф-ма, то из (5) $\Rightarrow$ на прямой M_0M эта функция является сложной функцией переменной t , $(n+1)$ раз дифф-мой для всех значений t из $[0, 1]$. Обозначим эту сложную функцию через $F(t)$ и запишем для нее формулу Тейлора с центром разложения в $t_0 = 0$ в форме (4) при $\Delta u = F(1) - F(0) = f(M) - f(M_0)$. Фигурирующие в (4) дифференциалы различных порядков являются дифференциалами сложной функции $u = f(x, y)$, где x и y – линейные функции (5) $\Rightarrow$ дифференциалы $\forall$ порядка ф-и $u = f(x, y)$:

$$d^n u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n u \quad \Rightarrow$$

$$d^k u|_{t_0=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k u|_{M_0(x_0, y_0)} = d^k u|_{M_0}$$

$$d^{n+1} u|_{t_0 + \theta(t - t_0)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{n+1} u|_{N(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)} = d^{n+1} u|_N \quad (6)$$

В (6) dx и dy находятся из (5) при $dt = \Delta t = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$ в (6): $dx = dt \Delta x = \Delta x, dy = dt \Delta y = \Delta y$ (7)

Подставляя $d^k u|_{t_0=0}$ и $d^{n+1} u|_{t_0 + \theta(t - t_0)}$ из (6) в (4) и учитывая (7), получим формулу Тейлора (1).

Развернутое выражение формулы Тейлора:

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 - x_1^\circ) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x_m - x_m^\circ) \right]^k f(x_1^\circ, \dots, x_m^\circ) + \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 - x_1^\circ) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} (x_m - x_m^\circ) \right]^{n+1} \times f[x_1^\circ + \theta(x_1 - x_1^\circ), \dots, x_m^\circ + \theta(x_m - x_m^\circ)]$$

25. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Т. Пусть $n \geq 1$ – целое число, $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ задана и $(n-1)$ раз диф-ма в ε -окрестности $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ и n раз диф-ма в M_0 . Тогда для $\forall$ точки M из ε -окрестности M_0 :

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!} du|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2 u|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^n u|_{M_0} + o(\rho^n) \quad (1)$$

где ρ – расстояние $\rho(M_0, M)$, $o(\rho^n)$ – бесконечно малая при $\rho \rightarrow 0$ (при $M \rightarrow M_0$) ф-я более высокого порядка малости, чем ρ^n .

3. В более подробной записи:

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(x_1^0, \dots, x_m^0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right]^k \times f(x_1^0, \dots, x_m^0) + o(\rho^n) \quad (2)$$

В правой части (2) – сумма многочлена степени n от m переменных $x_1, \dots, x_m$ и остаточного члена $o(\rho^n)$. Обозначим:

$$R_{n+1}(M) = f(M) - f(M_0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right]^k f(M_0) \quad (3)$$

Теорема будет доказана, если установить, что при выполнении условий теоремы $R_{n+1}(M) = o(\rho^n)$.

Л1. Если $f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ n раз диф-ма в $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, то как сама ф-я $R_{n+1}(M)$, определяемая равенством (3), так и все ее частные производные по $\forall$ переменным $x_1, \dots, x_m$ до порядка n включительно обращаются в 0 в точке M_0 .

Док-во. При $n = 1$ функция (3):

$$R_2(M) = f(M) - f(M_0) - (x_1 - x_1^0) \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) - \dots - (x_m - x_m^0) \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)$$

и $R_2(M_0) = 0$, $\frac{\partial R_2}{\partial x_i}(M_0) = 0$ ($i = 1, \dots, m$) проверяются элементарно.

Далее по индукции. Пусть лемма справедлива для некоторого $n \geq 1$. Пусть $f(M)$ $(n+1)$ раз диф-ма в точке M_0 и

$$R_{n+2}(M) = f(M) - f(M_0) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right]^k f(M_0) \quad (4)$$

$R_{n+2}(M_0) = 0$, т.к. в (4) каждая $(x_i - x_i^0) = 0$ в точке M_0 . Надо доказать, что для $\forall i = 1, \dots, m$ ф-я $\frac{\partial R_{n+2}}{\partial x_i}(M)$ и все ее частные производные до n включительно обращаются в 0 в M_0 , для этого в силу индуктивного предположения достаточно доказать, что $\frac{\partial R_{n+2}}{\partial x_i}(M)$ определяется равенством типа (3):

$$\frac{\partial R_{n+2}}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(M) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right]^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) \quad (5)$$

Т.к. все x_i ($i = 1, \dots, m$) равноправны и входят в (4) симметрично, то достаточно доказать (5) для $i = 1$:

$$\frac{\partial R_{n+2}}{\partial x_1}(M) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right]^k \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) \quad (6)$$

Из (4) $\Rightarrow$ для док-ва (6) достаточно убедиться: для $\forall k = 1, \dots, n+1$ при фиксированных $x_2, x_3, \dots, x_m$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx_1} \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right]^k f(M_0) = \\ & = k \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right]^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) \quad (7) \end{aligned}$$

Т.к. при дифференцировании по x_1 переменные $x_2, x_3, \dots, x_m$ фиксированы, то величину

$$D = (x_2 - x_2^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m}$$

при дифференцировании по x_1 можно рассматривать как постоянную.

Т.к. символы $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ используются для образования частных производных функции f в фиксированной M_0 , то при дифференцировании по x_1 указанные символы также нужно рассматривать как постоянные величины $\Rightarrow$ для док-ва (7) достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{d}{dx_1} \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + D \right]^k = k \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + D \right]^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (8)$$

Дифференцируя ф-ю $\left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + D \right]^k$ по x_1 как сложную и учитывая независимость от x_1 символов D и $\frac{\partial}{\partial x_1}$, получим (8).

Л2. Пусть $R(M) = R(x_1, \dots, x_m) - \forall$ функция, удовлетворяющая:

1) $R(M)$ n раз дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$,
2) сама функция $R(M)$ и все ее частные производные по $\forall$ из переменных $x_1, \dots, x_m$ до порядка n включительно обращаются в 0 в точке M_0 . Тогда для функции $R(M)$ справедлива оценка

$$R(M) = o(\rho^n) \quad (9)$$

где ρ – расстояние $\rho(M_0, M)$.

Док-во. При $n = 1$ утверждение леммы вытекает из условия дифф-сти ф-и $R(M)$ в M_0 :

$$R(M) - R(M_0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial R}{\partial x_k}(M_0)(x_k - x_k^0) + o(\rho)$$

Учитывая, что $R(M_0) = 0$, $\frac{\partial R}{\partial x_k}(M_0) = 0$ для $\forall k = 1, \dots, m$, получим: $R(M) = o(\rho)$. Далее по индукции. Пусть Л2 справедлива для некоторого $n \geq 1$ и $R(M)$ удовлетворяет требованиям Л2 для $n+1 \Rightarrow \forall \frac{\partial R}{\partial x_k}(M)$ удовлетворяет требованиям Л2 для $n \Rightarrow$

$$\frac{\partial R}{\partial x_k}(M) = o(\rho^n) \quad (10)$$

Т.к. $n \geq 1$, то $n+1 \geq 2$ и $R(M)$, удовлетворяющая требованиям Л2 для $n+1$, хотя бы 1 раз дифф-ма в окрестности $M_0 \Rightarrow$ выполнены условия разложения по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $n = 0$, т.е. для $\forall M$ из достаточно малой ε -окрестности M_0 на отрезке $M_0M \ni N$:

$$R(M) = R(M_0) + \frac{1}{1!} \sum_{k=1}^m (x_k - x_k^0) \frac{\partial R}{\partial x_k}(N) \quad (11)$$

N лежит между M_0 и M и $\rho = \rho(M_0, M) \Rightarrow \rho(M_0, N) \leq \rho \Rightarrow$ из (10) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial R}{\partial x_k}(N) = o(\rho^n) \Rightarrow [\text{т.к. } R(M_0) = 0]$$

$$\Rightarrow R(M) = o(\rho^n) \sum_{k=1}^m |x_k - x_k^0| =$$

$$= \left[\text{т.к. } |x_k - x_k^0| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} = \rho \right] = o(\rho^n)$$

Док-во теоремы. В силу Л1 сама функция (3) и все ее частные производные по $\forall$ переменным $x_1, \dots, x_m$ до порядка n включительно обращаются в 0 в точке M_0 . Но тогда в силу Л2 для функции (3) справедлива оценка $R_{n+1}(M) = o(\rho^n)$.

26. Экстремум функции нескольких переменных.

$u = f(M)$ определена в некоторой окрестности $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ пр-ва E_m .

01. Ф-я $u = f(M)$ имеет в M_0 локальный максимум (минимум), если $\exists \varepsilon$ – окрестность M_0 , в пределах которой значение $f(M_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех значений $f-u$.

02. Ф-я $u = f(M)$ имеет в M_0 локальный экстремум, если она имеет в M_0 либо локальный максимум, либо локальный минимум.

У1* (необходимое условие экстремума). Если $u = f(M)$ обладает в $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ частными производными 1-го порядка по всем $x_1, \dots, x_m$ и имеет в M_0 локальный экстремум, то:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, m} \quad (1)$$

Док-во. У $f(x_1, \dots, x_m)$ зафиксировать: $x_2 = x_2^0, \dots, x_m = x_m^0 \Rightarrow$ получим ф-ю 1 переменной x_1 . Ее производная в $x_1 = x_1^0$ совпадает с $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$.

Т.к. функция m переменных имеет локальный экстремум в M_0 , то ф-я 1 переменной имеет локальный экстремум в $x_1 = x_1^0 \Rightarrow$ ее производная в этой точке $= 0$. Остальные равенства аналогично.

У1*. Если $u = f(M)$ дифф-ма в M_0 и имеет в M_0 локальный экстремум, то дифференциал $du|_{M_0} \equiv 0$ относительно дифференциалов независимых переменных $dx_1, \dots, dx_m$. (т.к.

$$du|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m$$

то из (1) $\Rightarrow$ при $\forall dx_1, \dots, dx_m$ справедливо $du|_{M_0} = 0$).

Если $x_1, \dots, x_m$ 2 раза дифф-мой ф-и – независимые переменные или линейные ф-и некоторых независимых переменных, то 2-ой дифференциал этой ф-и в данной M_0 является квадратичной формой относительно дифференциалов аргументов $dx_1, \dots, dx_m$:

$$d^2u|_{M_0} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} dx_i dx_k, \text{ где } a_{ik} = a_{ki} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(M_0) \quad (2)$$

Т(достаточные условия локального экстремума). Пусть функция $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ 1 раз дифф-ма в некоторой окрестности $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ и 2 раза дифф-ма в самой M_0 . Пусть M_0 – точка возможного экстремума, т.е. $du|_{M_0} = 0$. Тогда, если 2-й дифференциал (2) является положительно (отрицательно) определенной КФ от переменных $dx_1, \dots, dx_m$, то $u = f(M)$ имеет в M_0 локальный минимум (максимум). Если 2-й дифф-ал (2) – знакопеременная КФ, то $u = f(M)$ не имеет локального экстремума в M_0 .

Док-во. 1) Пусть 2-й дифференциал (2) – положительно определенная КФ от $dx_1, \dots, dx_m$. Разложим $u = f(M)$ в окрестности M_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано при $n = 2$

$$f(M) - f(M_0) = du|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2u|_{M_0} + o(\rho^2) \quad (3)$$

где $dx_k = x_k - x_k^0$ в выражения для $du|_{M_0}$ и $d^2u|_{M_0}$, а ρ :

$$\rho = \sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_m)^2} = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2} \quad (4)$$

M_0 – точка возможного экстремума $\Rightarrow du|_{M_0} = 0 \Rightarrow$ полагая в (2) $dx_k = x_k - x_k^0$, (3) примет вид:

$$f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} (x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0) + o(\rho^2) \quad (5)$$

Если для малых ρ правая часть (5) > 0 , то в малой окрестности M_0 : $f(M) - f(M_0) > 0 \Rightarrow u = f(M)$ имеет в M_0 локальный минимум.

Пусть $h_i = (x_k - x_k^0) / \rho, i = 1, \dots, m \Rightarrow$ из (4):

$$|h_i| \leq 1, h_1^2 + \dots + h_m^2 = 1 \quad (6)$$

(5) можно переписать:

$$\begin{aligned} f(M) - f(M_0) &= \frac{\rho^2}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h_i h_k + o(\rho^2) = \\ &= \left[\alpha(\rho) = \frac{o(\rho^2)}{\rho^2} - \text{бесконечно малая при } \rho \rightarrow 0 \right] = \\ &= \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h_i h_k + \alpha(\rho^2) \right] \quad (5^*) \end{aligned}$$

КФ $\Phi = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h_i h_k$ – функция, определенная и непрерывная на поверхности единичной сферы (6), являющейся замкнутым и ограниченным мн-вом. По 2-й Т Вейерштрасса эта ф-я достигает на этом мн-ве своей ТНГ μ , и из положительной определенности КФ Φ и из того, что $h_1, \dots, h_m$, удовлетворяющие (6), $\neq 0$ одновременно $\Rightarrow$ ТНГ $\mu > 0$. Т.к. бесконечно малая при $\rho \rightarrow 0$ функция $\alpha(\rho)$ при всех малых ρ :

$|\alpha(\rho)| < \mu$, то вся правая часть (5) > 0 при этих ρ , т.е. при всех M , достаточно близких к $M_0 \Rightarrow u = f(M)$ имеет в M_0 локальный минимум.

2) Доп. св-во: если КФ $\Phi(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h_i h_k$ знакопеременна, то $\exists 2$ совокупности переменных $(h'_1, \dots, h'_m)$ и $(h''_1, \dots, h''_m)$:

$$(h'_1)^2 + \dots + (h'_m)^2 = 1, \quad (h''_1)^2 + \dots + (h''_m)^2 = 1 \quad (7)$$

причем $\Phi(h'_1, \dots, h'_m) > 0, \Phi(h''_1, \dots, h''_m) < 0$ (8)

Из определения знакопеременной КФ $\Rightarrow \exists 2$ совокупности $(t'_1, \dots, t'_m)$ и $(t''_1, \dots, t''_m)$, состоящие из чисел, одновременно $\neq 0$, и такие, что $\Phi(t'_1, \dots, t'_m) > 0, \Phi(t''_1, \dots, t''_m) < 0$. Положив

$$h'_i = \frac{t'_i}{\sqrt{(t'_1)^2 + \dots + (t'_m)^2}}, \quad h''_i = \frac{t''_i}{\sqrt{(t''_1)^2 + \dots + (t''_m)^2}} \quad (9)$$

и учитывая, что из определения КФ $\Rightarrow$

$$\Phi(h'_1, \dots, h'_m) = \frac{1}{(t'_1)^2 + \dots + (t'_m)^2} \Phi(t'_1, \dots, t'_m),$$

$$\Phi(h''_1, \dots, h''_m) = \frac{1}{(t''_1)^2 + \dots + (t''_m)^2} \Phi(t''_1, \dots, t''_m)$$

получим неравенства (8), из (9) $\Rightarrow$ (7). Доп. свойство доказано.

Зафиксируем 2 совокупности $(h'_1, \dots, h'_m)$ и $(h''_1, \dots, h''_m)$, удовлетворяющие (7) и (8), и докажем, что для $\forall \rho > 0$ найдутся M' ($x'_1, \dots, x'_m$) и M'' ($x''_1, \dots, x''_m$) пр-ва $E^m: \rho(M', M_0) = \rho(M'', M_0) = \rho$, причем

$$\frac{x'_i - x_i^0}{\rho} = h'_i, \quad \frac{x''_i - x_i^0}{\rho} = h''_i \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

Положив для $\forall \rho > 0$ и для всех i : $x'_i = x_i^0 + \rho h'_i, x''_i = x_i^0 + \rho h''_i$ удовлетворим соотношениям (10), причем в силу (7) справедливы:

$$\rho(M', M_0) = \sqrt{(x'_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x'_m - x_m^0)^2} = \rho \sqrt{(h'_1)^2 + \dots + (h'_m)^2} = \rho$$

$$\rho(M'', M_0) = \sqrt{(x''_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x''_m - x_m^0)^2} = \rho$$

Беря в точках M' и M'' для $u = f(M)$ разложение в окрестности M_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получим вместо (5) разложения, справедливые для всех достаточно малых $\rho > 0$:

$$\begin{aligned} f(M') - f(M_0) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} (x'_i - x_i^0)(x'_k - x_k^0) + o(\rho^2) = \\ &= [\text{из (10) и } o(\rho^2) = \rho^2 \cdot \alpha(\rho), \alpha(\rho) \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0] = \\ &= \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h'_i h'_k + \alpha(\rho) \right] = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \Phi(h'_1, \dots, h'_m) + \alpha(\rho) \right] \quad (11) \end{aligned}$$

Для точки M'' все ана-но. Учитывая (8) и что $\Phi(h'_1, \dots, h'_m) > 0, \Phi(h''_1, \dots, h''_m) < 0$ не зависят от ρ и $\rho(M', M_0) = \rho(M'', M_0) = \rho$, получим из (11), что для как угодно малого $\rho > 0$: $f(M') > f(M_0)$ и $f(M'') < f(M_0) \Rightarrow$ отсутствие экстремума в M_0 .

3. Требование $d^2u|_{M_0} \geq 0$ ($d^2u|_{M_0} \leq 0$) является необходимым условием локального минимума (максимума) в M_0 дважды дифференцируемой в этой точке ф-и $u = f(M)$.

Пусть $f(M)$ имеет в M_0 локальный минимум, но условие $d^2u|_{M_0} \geq 0$ не выполнено $\Rightarrow \exists h_1, \dots, h_m$:

$$d^2u|_{M_0} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(M_0) h_i h_k < 0$$

Функция $F(t) = f(x_1^0 + th_1, \dots, x_m^0 + th_m)$, определенная при всех t , достаточно малых по модулю, обязана иметь локальный минимум в точке $t = 0$, чему противоречит $F''(0) = d^2u|_{M_0} < 0$

Утверждение. Пусть ф-я двух переменных $u = f(x, y)$ 1 раз дифф-ма в окрестности $M_0(x^0, y^0)$ и 2 раза дифф-ма в самой M_0 и пусть M_0 – точка возможного экстремума. Тогда, если в M_0 выполнено условие $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то $u = f(x, y)$ имеет в M_0 локальный экстремум (максимум при $a_{11} < 0$ и минимум при $a_{11} > 0$). Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ в M_0 , то $u = f(x, y)$ не имеет в M_0 локального экстремума.

27. Теорема о существовании и дифф-сти неявно заданной ф-и.

Если переменная u является по смыслу задачи ф-ей аргументов $x, y, \dots$, но задается уравнением $F(u, x, y, \dots) = 0$, то ф-я u задана **неявно**.
 R – пр-во переменных $(u, x, y, \dots)$, R' – пр-во переменных $(x, y, \dots)$
Т. Пусть $F(u, x, y)$ дифф-ма в некоторой окрестности $M_0(u^0, x^0, y^0) \in R$, причем $\frac{\partial F}{\partial u}$ непрерывна в M_0 . Тогда, если в M_0 ф-я F обращается в 0, а $\frac{\partial F}{\partial u}$ не обращается в 0, то для $\forall$ достаточно малого $\varepsilon > 0$ $\exists$ такая окрестность $M'_0(x^0, y^0) \in R'$, что в пределах этой окрестности $\exists$!

ф-я $u = \varphi(x, y)$, которая удовлетворяет $|u - u^0| < \varepsilon$ и является решением уравнения $F(u, x, y, \dots) = 0$, **(1)**
 причем $u = \varphi(x, y)$ непрерывна и дифф-ма в этой окрестности M'_0 .
Док-во. 1. Докажем, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ в окрестности $M'_0(x^0, y^0) \exists$! $u = \varphi(x, y)$, удовлетворяющая $|u - u^0| < \varepsilon$ и являющаяся решением (1). Уравнение (1) определяет в R некоторую поверхность S . $F(M_0) = 0 \Rightarrow M_0 \in S$. Геометрически однозначная разрешимость (1) относительно u : часть S , близкая к M_0 , однозначно проектируется на Oxy .

Пусть $\frac{\partial F}{\partial u} > 0$ в $M_0 \Rightarrow$ из непрерывности $\frac{\partial F}{\partial u}$ в M_0 и из теоремы об устойчивости знака непрерывной ф-и $\Rightarrow \exists$ окрестность M_0 , в пределах которой $\frac{\partial F}{\partial u} > 0$. Пусть эта окрестность – шар Ω достаточно малого радиуса с центром в M_0 . Фиксируем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы $M_1(u^0 - \varepsilon, x^0, y^0)$ и $M_2(u^0 + \varepsilon, x^0, y^0)$ были внутри Ω . Рассмотрим $F(u, x^0, y^0)$ переменной u на $[u^0 - \varepsilon, u^0 + \varepsilon]$. Геометрически: рассматриваем ф-ю 3 переменных $F(u, x, y)$ вдоль отрезка M_1M_2 . Т.к. $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x^0, y^0) > 0$ на $[u^0 - \varepsilon, u^0 + \varepsilon]$, то $F(u, x^0, y^0)$ возрастает на этом сегменте $\Rightarrow$ т.к. $F = 0$ при $u = u^0$, то $F(M_1) < 0$, $F(M_2) > 0$. Рассмотрим $F(u^0 - \varepsilon, x, y)$ и $F(u^0 + \varepsilon, x, y)$ 2 переменных x и y (ф-ю $F(u, x, y)$ на 2 плоскостях, параллельных Oxy , 1-я проходит через M_1 , а 2-я – через M_2). $F(M_1) < 0$, $F(M_2) > 0$ и $F(u, x, y)$ непрерывна всюду в шаре Ω , то по Т об устойчивости знака непрерывной ф-и на этих плоскостях $\exists$ окрестности M_1 и M_2 , в пределах которых F сохраняет те же знаки, что и в M_1 и M_2 . Эти окрестности взять в виде открытых квадратов с центрами в M_1 и M_2 и с малой стороной 2δ .

$$\left. \begin{array}{l} F(u^0 - \varepsilon, x, y) < 0 \\ F(u^0 + \varepsilon, x, y) > 0 \end{array} \right\} \text{ при } |x - x^0| < \delta, |y - y^0| < \delta \quad (2)$$

Возьмем δ столь малым, чтобы оба квадрата лежали внутри $\Omega \Rightarrow \forall$ точка пр-ва (u, x, y) с координатами:

$$|x - x^0| < \delta, |y - y^0| < \delta, |u - u^0| < \varepsilon \quad (3)$$

будет лежать внутри Ω . Геометрически (3) – открытый прямоугольный параллелепипед Π с центром в M_0 со сторонами = 2ε , 2δ и 2δ и параллельными осям координат u, x, y . Т.к. Π лежит внутри Ω , то всюду в Π : $\frac{\partial F}{\partial u} > 0$. Из (2) $\Rightarrow F(u, x, y) < 0$ на нижнем основании Π и $F(u, x, y) > 0$ – на верхнем.

Докажем, что (1) однозначно разрешимо относительно u , если $F(u, x, y)$ рассматривать лишь для значений u, x, y , лежащих внутри Π . Пусть $M'(x, y) = \forall$ точка R' , координаты которой удовлетворяют $|x - x^0| < \delta, |y - y^0| < \delta$ **(4)**
 $\Rightarrow M'(x, y)$ лежит внутри квадрата с центром в $M'_0(x^0, y^0)$ и со сторонами 2δ . Надо доказать, что для координат x, y точки $M' \exists$! число u из $[u^0 - \varepsilon, u^0 + \varepsilon]$: $F(u, x, y) = 0$. (Геометрически: $\forall$ прямая, параллельная оси u и пересекающая Π , пересекает S внутри Π в только 1 раз.)

Зафиксировав x и y , удовлетворяющие (4), рассмотрим $F(u, x, y)$ аргумента u на $[u^0 - \varepsilon, u^0 + \varepsilon]$, т. е. ф-ю $F(u, x, y)$ на отрезке $M'_1M'_2$, где M'_1 и M'_2 – точки пересечения прямой, проходящей через $M'(x, y)$ и параллельной Ou , с основаниями Π . $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x, y) > 0$ на $[u^0 - \varepsilon, u^0 + \varepsilon]$, $\Rightarrow F(u, x, y)$ возрастает на этом сегменте (на отрезке $M'_1M'_2$) $\Rightarrow$ из $F(M'_1) < 0$, $F(M'_2) > 0 \Rightarrow$ внутри $[u^0 - \varepsilon, u^0 + \varepsilon] \exists$ 1 значение u : $F(u, x, y) = 0$ (внутри отрезка $M'_1M'_2 \exists$! точка $M \in S$.)

Пусть $u = \varphi(x, y)$ символизирует то правило, посредством которого каждой $M'(x, y)$ из окрестности (4) ставится в соответствие единственное число u из $[u^0 - \varepsilon, u^0 + \varepsilon]$, для которого $F(u, x, y) = 0 \Rightarrow$ в окрестности (4) $\exists$! ф-я $u = \varphi(x, y)$, удовлетворяющая $|u - u^0| < \varepsilon$ и являющаяся решением (1).

2. Докажем, что $u = \varphi(x, y)$ непрерывна в $\forall M'(x, y)$ окрестности (4). Т.к. для $\forall M'(x, y)$ из окрестности (4) выполнены те же условия, что и для $M'_0(x^0, y^0)$ (т.е. точке $M'(x, y)$ из окрестности (4) соответствует $M(u, x, y) \in R$: $F(u, x, y) = 0$ в M , дифф-ма в некоторой окрестности M и имеет в этой окрестности $\neq 0$ частную производную), то достаточно доказать непрерывность $u = \varphi(x, y)$ лишь в $M'_0(x^0, y^0)$.

Надо доказать, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: для $\forall x$ и y , удовлетворяющих (4), справедливо

$|u - u^0| < \varepsilon$, где $u = \varphi(x, y)$, $u^0 = \varphi(x^0, y^0)$. Если взять в качестве ε то число, которое выбрано при рассмотрении п. 1, то существование δ обеспечивается неравенствами (3). В рассуждениях п. 1

$\varepsilon > 0$ можно взять как угодно малым $\Rightarrow$ непрерывность $u = \varphi(x, y)$.
 Условие непрерывности $u = \varphi(x, y)$ в $M'_0(x^0, y^0)$ в разностной форме: $\Delta u \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$.

3. Докажем дифф-сть $u = \varphi(x, y)$ в $\forall M'(x, y)$ окрестности (4). В силу замечания из п. 2 достаточно доказать дифф-сть в $M'_0(x^0, y^0)$. Т.к. $F(u^0, x^0, y^0) = 0$ и $F(u^0 + \Delta u, x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) = 0$, то полное приращение ΔF функции $F(u, x, y)$ в точке $M_0(u^0, x^0, y^0)$ соответствующее приращениям аргументов Δu , Δx и Δy , равно 0. Но из дифф-сти $F(u, x, y)$ в точке $M_0(u^0, x^0, y^0)$:

$$0 = \Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma\right)\Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta\right)\Delta y \quad (5)$$

$\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ берутся в $M_0(u^0, x^0, y^0)$, α, β и $\gamma \rightarrow 0$ при $\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$

Из разностной формы условия непрерывности $u = \varphi(x, y)$ в $M'_0(x^0, y^0)$: $\Delta u \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow$ из $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha, \beta$ и $\gamma \rightarrow 0$.

По условию теоремы $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$ в M_0 . Т.к. $\gamma \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, то при достаточно малых Δx и Δy выражение $\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma$ не обращается в 0 $\Rightarrow$ (5) можно на него поделить:

$$\Delta u = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma}\right)\Delta x + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y} + \beta}{\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma}\right)\Delta y \quad (6)$$

По теореме о предельном значении частного двух функций:

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}} + \mu, \quad -\frac{\frac{\partial F}{\partial y} + \beta}{\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}} + \nu \quad (7)$$

где μ и $\nu \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$. Из (6) и (7) $\Rightarrow$

$$\Delta u = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\right)\Delta x + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\right)\Delta y + \mu\Delta x + \nu\Delta y \quad (8)$$

(8) доказывает дифф-сть $u = \varphi(x, y)$ в $M'_0(x^0, y^0)$.

28. Теорема о разрешимости системы функциональных уравнений.

Пусть m функций $u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n)$,

$$\dots \quad (1)$$

$$u_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$$

ищутся как решение системы m функциональных уравнений

$$F_1(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (2)$$

$$F_m(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) = 0$$

Решение системы (2) – это совокупность m ф–й (1) таких, что при их подстановке в (2) все уравнения системы обращаются в тождества. Это решение называется непрерывным и дифф–мым в области D изменения $x_1, \dots, x_n$, если каждая из ф–й (2) непрерывна и дифф–ма в D . R – пр–во $(m + n)$ переменных $u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n$, R' – пр–во n переменных $x_1, \dots, x_n$. Из частных производных функций $F_1, \dots, F_m$ составим *определитель Якоби (якобиан)* :

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Т. Пусть t функций $F_1(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n)$

$$\dots \quad (4)$$

$$F_m(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n)$$

дифф-мы в некоторой окрестности $M_0(u_1^0, \dots, u_m^0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in R$, причем их частные производные по $u_1, \dots, u_m$ непрерывны в M_0 . Тогда, если в M_0 все Φ -и (4) = 0, а якобиан $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} \neq 0$, то для достаточно малых $\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_m > 0$ $\exists$ окрестность $M'_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in R'$, что в пределах этой окрестности $\exists$ m функций (1), которые удовлетворяют условиям $|u_1 - u_1^0| < \varepsilon_1, \dots, |u_m - u_m^0| < \varepsilon_m$ и являются решением системы (2), причем это решение непрерывно и дифф-мо в указанной окрестности M'_0 .

Док-во. По индукции. При $m = 1$ это теорема о существовании и дифф-сти неявно заданной ф-и. Пусть теорема справедлива для системы $m - 1$ уравнений, докажем для системы m уравнений. Т.к.

$$\Delta = \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \quad (3)$$

$\neq 0$ в M_0 , то хотя бы 1 из его миноров $(m-1)$ -го порядка $\neq 0$ в M_0 , например, минор, стоящий в левом верхнем углу $\Rightarrow$ по предположению индукции, первые $m-1$ уравнений (2) разрешимы относительно $u_1, \dots, u_{m-1} \Rightarrow$ для малых $\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_m > 0 \exists$ такая окрестность $M''_0(u_m^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ пр-ва R'' переменных $(u_m, x_1, \dots, x_n)$, что в пределах этой окрестности определены функции $m-1$ функций

$$\begin{aligned} u_1 &= \Phi_1(u_m, x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_{m-1} = \Phi_{m-1}(u_m, x_1, \dots, x_n)$$

которые $|u_1 - u_1^\circ| < \varepsilon_1, \dots, |u_{m-1} - u_{m-1}^\circ| < \varepsilon_{m-1}$ и являются единственным непрерывным и дифф-мым решением системы первых $m - 1$ уравнений (2).

Подставим (4) в левую часть последнего уравнения из (2) => она превращается в функцию Ψ , зависящую только от $u_m, x_1, \dots, x_n$

$$\begin{aligned} F_m(u_1, \dots, u_{m-1}, u_m, x_1, \dots, x_n) &= F_m(\Phi_1(u_m, x_1, \dots, x_n), \dots, \\ \Phi_{m-1}(u_m, x_1, \dots, x_n), u_m, x_1, \dots, x_n) &= \Psi(u_m, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Phi_{m-1}(u_m, x_1, \dots, x_n), u_m, x_1, \dots, x_n) = \Psi(u_m, x_1, \dots, x_n) \quad (5)$$

Т.о., последнее из уравнений (2) приводит к уравнению

$$\Psi(u_m, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (6)$$

В силу (5) $\Psi(u_m, x_1, \dots, x_n)$ – сложная ф-я своих аргументов $\Rightarrow$ по теореме о дифф-сти сложный ф-и, $\Psi(u_m, x_1, \dots, x_n)$ дифф-ма в некоторой окрестности $M_0''(u_m^\circ, x_1^\circ, \dots, x_n^\circ) \in R''$. Из (5) и последнего из уравнений (2) $\Rightarrow \Psi(u_m^\circ, x_1^\circ, \dots, x_n^\circ) = 0 \Rightarrow$ чтобы доказать, что к (6) применима теорема о существовании и дифф-сти неявно заданной ф-и и это уравнение разрешимо относительно u_m , достаточно установить, что $\frac{\partial \Psi}{\partial u_m} \neq 0$ и непрерывна в M_0'' . Подставим

– 1 уравнений (2) ф-ии (4) и продифф-ем по u_m :

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial u_{m-1}} \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_m} + \frac{\partial F_1}{\partial u_m} = 0 \quad (7^1)$$

$$\frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m} + \dots + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_{m-1}} \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_m} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_m} = 0 \quad (7^{m-1})$$

Продифф—ем (5) по u_m :

$$\frac{\partial F_m}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial u_{m-1}} \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_m} + \frac{\partial F_m}{\partial u_m} = \frac{\partial \Psi}{\partial u_m} \quad (7^m)$$

Умножим $(7^1) - (7^m)$ на соответствующие алгебраические дополнения $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ элементов последнего столбца якобиана (3) и сложим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_m} \left[\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_k} + \cdots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial u_k} \right] + \left(\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_m} + \cdots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \right) = \\ = \Delta_m \frac{\partial \Psi}{\partial u_m} \end{aligned}$$

Т.к. сумма произведений эл-тов данного столбца определителя на соотв-щие алгебраические дополнения элементов этого (другого) столбца = определителю (0), то каждая $\Delta_{ij} = 0$, а Δ_{ii} – якобиану (3) =>

$$\Delta = \Delta_m \frac{\partial \Psi}{\partial u_m} \quad (8)$$

Δ – якобиан (3), Δ_m – алгебраическое дополнение последнего элемента последнего столбца, которое совпадает с левым верхним минором и, по предположению, $\neq 0$ в M_0 . Поделим (8) на Δ_m :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_m} = \frac{\Delta}{\Delta_m} \quad (9)$$

Формула (9), справедливая в M_0'' , доказывает непрерывность $\frac{\partial \Psi}{\partial u_m}$ в M_0'' , т.к. Δ и Δ_m состоят из частных производных функций (4) по $u_1, \dots, u_m$, непрерывных в M_0 . Из (9) $\Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial u_m} \neq 0$ в M_0'' (т.к. $\Delta \neq 0$ в M_0). Т.о., к (6) можно применить теорему о существовании и дифф-сти неявно заданной ϕ -и: для дост-но малого $\varepsilon_m \geq 0$ окрестность $M'_0(x_1, \dots, x_n) \in R'$, что всюду в ее пределах определена ϕ -я

$$u_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \quad (10)$$

которая удовлетворяет $|u_m - u_m^0| < \varepsilon_m$ и является единственным непрерывным и дифф-мым решением уравнения (6). Имея в виду, что φ_i и (4) являются решениями первых $m-1$ уравнений (2) при $\forall u_m, x_1, \dots, x_n$ из окрестности M_0^n , и ставя (10) в (4), получим функции, зависящие только от $x_1, \dots, x_n$:

$$u_1 = \Phi_1(\varphi_m(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$u_{m-1} = \Phi_{m-1}(\varphi_m(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) = \varphi_{m-1}(x_1, \dots, x_n)$$

По теореме о дифф-сти сложной функции каждая из $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ дифф-ма в окрестности $M'_0(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$. Т.о., доказано: m функций

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \end{aligned} \quad (11)$$

$$u_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$$

удовлетворяют в окрестности M'_0 условиям $|u_1 - u_1^*| < \varepsilon_1, \dots, |u_m - u_m^*| < \varepsilon_m$ и являются при наличии этих условий единственным непрерывным и дифф-мым в некоторой окрестности $M'_0(x_1^*, \dots, x_n^*)$ решением системы (2). Осталось доказать, что функции (11) являются единственным решением системы (2). Пусть кроме ф-й (11), существуют еще m функций

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \hat{\varphi}_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \end{aligned} \quad (11')$$

$$\hat{u}_m = \hat{\varphi}_m(x_1, \dots, x_n)$$

также являющихся решением системы (2) и удовлетворяющих $|\hat{u}_1 - u_1^*| < \varepsilon_1, \dots, |\hat{u}_m - u_m^*| < \varepsilon_m$. Тогда, в силу предположения индукции, первые $(m-1)$ функций (11) являются при заданном $u_m = \hat{u}_m$ единственным и дифференцируемым решением системы первых $(m-1)$ уравнений (2). Но при заданном u_m единственное решение системы первых $(m-1)$ уравнений (2) дается равенствами (4). Т.о., справедливы

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \Phi_1(\hat{u}_m, x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \end{aligned} \quad (4')$$

$$\hat{u}_{m-1} = \Phi_{m-1}(\hat{u}_m, x_1, \dots, x_n)$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_{m-1}$ – те же функции, что и (4) $\Rightarrow$ из последнего уравнения (2) и соотношения (5) $\Rightarrow \hat{u}_m$ – единственное решение уравнения (6), т. е. $\hat{u}_m = u_m \Rightarrow$ из (4') и (4) $\Rightarrow \hat{u}_1 = u_1, \dots, \hat{u}_{m-1} = u_{m-1}$.

29. Понятие зависимости функций. Функциональные матрицы.

Пусть m функций от одних и тех же n переменных

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n),$$

$$\dots$$

$$u_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

определены и дифф-мы в некоторой открытой n -мерной области D .

Из этих ф-й, напр. u_k , зависит в области D от остальных, если для всех точек $(x_1, \dots, x_n) \in D$: $u_k = \Phi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m)$ (2)

где Φ – некоторая ф-я, определенная и дифф-мая в соответствующей области изменения своих аргументов. Функции $u_1, \dots, u_m$ зависимы в области D , если 1 из них зависит в D от остальных.

Если Δ дифф-мой ф-й Φ : сразу для всех точек области D справедливо тождество вида (2), то $u_1, \dots, u_m$ независимы в D .
Определитель Якоби:

$$\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

T1(достат. усл-е незав-сти). Пусть m функций от $n \geq m$ переменных

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n),$$

...

$$u_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

определены и дифф-мы в окрестности $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Тогда если якобиан из этих функций по каким-либо m переменным отличен от 0 в M_0 , то эти ф-и независимы в некоторой окрестности M_0 .

Док-во. Пусть в M_0 отличен от 0 якобиан

$$\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \quad (2)$$

Пусть $u_1, \dots, u_m$ зависимы в некоторой окрестности M_0 :

$$u_k = \Phi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m)$$

где Φ – некоторая дифф-мая ф-я. Производная сложной u_k по $\forall x_l$:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k-1}} \frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_l} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k+1}} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_l}, \quad (3)$$

=> если их взять (3) для каждого $l = 1, 2, \dots, m$ в M_0 , то k -я строка якобиана (2) является линейной комбинацией остальных строк с коэффициентами $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k-1}}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_m}$ => якобиан (2) = 0 в M_0 , => противоречит условию теоремы.

Функциональные матрицы. Пусть функции (1) определены и дифф-мы в некоторой окрестности $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ и все их частные производные 1-го порядка непрерывны в самой M_0 .

Функциональная матрица из m строк и n столбцов:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (4)$$

T2. Пусть у функциональной матрицы (4): 1) некоторый минор r -го порядка отличен от 0 в $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, 2) все миноры $(r+1)$ -го порядка = 0 в некоторой окрестности M_0 . Тогда r функций, представленных в указанном миноре r -го порядка, независимы в окрестности M_0 , каждая из остальных функций зависит в этой окрестности от указанных r функций. (Если $r = \min(m, n)$, требование 2) опустить)

Док-во. Пусть в $M_0 \neq 0$ минор в левом верхнем углу (4)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} \quad (5)$$

=> из T1 => независимость $u_1, \dots, u_r$ в окрестности M_0 . Надо доказать, что $\forall$ из $u_{r+1}, \dots, u_m$ ($m > r$) зависит в окрестности M_0 от $u_1, \dots, u_r$.
Напри-мер u_{r+1} . Пусть $u_1^0 = \varphi_1(x_1^0, \dots, x_n^0), \dots, u_r^0 = \varphi_r(x_1^0, \dots, x_n^0)$ => то всюду в некоторой окрестности $N_0(u_1^0, \dots, u_r^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ ($n+r$)-мерного пр-ва 1-ые r функций (1) являются единственным и дифференцируемым решением системы уравнений:

$$F_1(u_1, \dots, u_r, x_1, \dots, x_n) \equiv \varphi_1(x_1, \dots, x_n) - u_1 = 0,$$

$$\dots$$

$$F_r(u_1, \dots, u_r, x_1, \dots, x_n) \equiv \varphi_r(x_1, \dots, x_n) - u_r = 0 \quad (6)$$

(в N_0 все $F_1, \dots, F_r$ обращаются в 0, а $\frac{D(F_1, \dots, F_r)}{D(u_1, \dots, u_r)} = (-1)^r \neq 0$ => выполнены условия теоремы о разрешимости системы функциональных уравнений). Якобиан $\frac{D(F_1, \dots, F_r)}{D(x_1, \dots, x_r)}$ совпадающий с

минором (5), $\neq 0$ в N_0 => всюду в достаточно малой окрестности N_0 система (6) имеет единственное и дифф-мое решение

$$x_1 = \psi_1(u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$$

$$\dots$$

$$x_r = \psi_r(u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n) \quad (7)$$

Равенства (7) и 1-ые r равенств (1) полностью эквивалентны в окрестности N_0 : если подставить $x_1, \dots, x_r$ из (7) в 1-ые r равенств (1), то они обратятся в тождества относительно $x_{r+1}, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r$.

Дифференцируя (7) по x_l ($l = r+1, \dots, n$) и замечая, что $u_1, \dots, u_r$ не зависят от $x_{r+1}, \dots, x_n$:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} = 0 \quad (8^1)$$

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_l} = 0 \quad (8^r)$$

Равенства (8¹) – (8^r) справедливы для всех значений $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ из некоторой окрестности M_0 . Подставим $x_1, \dots, x_r$ из (7) в $(r+1)$ -е равенство (1) => u_{r+1} – функция Φ от $u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n$, т.к. $u_{r+1} = \varphi_{r+1}(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = \varphi_{r+1}(\psi_1(u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, \psi_r(u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_n) = \Phi(u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ => u_{r+1} зависит в некоторой окрестности M_0 от $u_1, \dots, u_r$. Остается доказать, что для всех значений $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$, лежащих в малой окрестности M_0 , функция Φ не зависит от $x_{r+1}, \dots, x_n$. Дост-но доказать, что для всех $x_1, \dots, x_n$ из достаточно малой окрестности точки M_0 :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0 \quad (l = r+1, \dots, n) \quad (9)$$

Продифференцируем Φ по x_l ($l = r+1, \dots, n$) как сложную ф-ю:

$$\frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \quad (8^{r+1})$$

Рассмотрим минор $(r+1)$ -го порядка матрицы (4):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_l} \\ \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_l} \end{vmatrix} \quad (10)$$

По условию теоремы он = 0 всюду в окрестности M_0 . Умножим равенства (8¹) – (8^{r+1}) на соответствующие алгебраические дополнения $\Delta_1, \dots, \Delta_{r+1}$ элементов последнего столбца (10) и сложим

$$\sum_{k=1}^r \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} \Delta_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_k} \Delta_{r+1} \right] + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+1}} \Delta_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \Delta_{r+1} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \Delta_{r+1}$$

Т.к. сумма произведений элементов данного столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого (другого) столбца равна определителю (0), то каждая [] = 0, а () = минору (10):

$$\Delta = \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \Delta_{r+1} \quad (11)$$

Δ – минор (10), = 0 всюду в окрестности M_0 , алгебраическое дополнение Δ_{r+1} совпадает с минором (5), $\neq 0$ в M_0 и в некоторой окрестности M_0 (т.к. все частные производные, входящие в (5), непрерывны в M_0 , то и сам минор (5) непрерывен в M_0 => по теореме об устойчивости знака непрерывной функции этот минор $\neq 0$ не только в M_0 , но и в некоторой ее окрестности). Из (11) => всюду в некоторой окрестности M_0 справедливы равенства (9).

что и в случае, когда все $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ независимы. Надо в (17) подставить вместо $dy_1, \dots, dy_m$ их значения из системы (8). Потом изучить знакоопределенность $d^2\Psi$ в данной M_0 .